Kesir Dereceli Dadras-Momeni Sisteminde Kaos

Muhammet Taha ATAŞ[1], Hasan GÜLER[2]
Fırat Üniversitesi
Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü
Elazığ
tahaatas23@gmail.com[1], hasanguler@firat.edu.tr.[2]

Özet: *Bu çalışmada, kesir dereceli Dadras-Momeni sisteminin simülasyonu yapıldı. Kesir dereceli bir sistem, tam sayılı bir sistemin türev ve integral derecesinin kesirli alınarak çalışıldığı bir sistemdir. Kesir dereceli bir kaotik sistem, tam sayılı dereceli kaotik bir sistem gibi kaos oluşturulabilir. Dadras-Momeni sisteminin tam sayılı dereceleri baz alınarak kesir dereceli Dadras-Momeni sistemi oluşturuldu ve oluşan bu sistemin faz diyagramı çizildi. Faz diyagramının çizilmesiyle bu sistemde kaosun varlığı gözlemlendi. Sistemin kesirli derecesi kaotik davranış sergilemeyene kadar düşürüldü ve böylece sistemin karşılığı en küçük kesir derece bulunuldu.*

Abstract: *In this study, the fractional order model of Dadras-Momeni system simulated. A Fractional order system is that calculating integer order of integral and derivation of system with fractional one. Chaotic behaviors can be found in fractional order systems similar to integer order system can be generated. Dadras-Momeni is a chaotic system, which was obtained by obtaining the model of the fractional integral corresponding to the integer value. Chaos was observed by the phase diagrams were drawn. Until no chaotic behaviors are found in this fractionalorder system, the number of multi-scroll chaotic attractors is decreasing with the reducing of system order.*

1. Giriş

Kesirli hesaplama içinde türev veya integral bulunduran sistemlerin derecelerinin tam sayı yerine kesirli olarak alınarak hesaplama yapılan yöntemdir. Kesir dereceli hesaplama, elektromanyetik dalgalar [1], robotik uygulamaları [2], filtre tasarımları [3-4], biyomühendislik, fizik, kontrol sistemi, sinyal işleme, kimya, kaos teorisi, biyoloji ve fizyoloji [5] gibi birçok farklı bilim dallarındaki daha tutarlı sonuçlar verdiği için bu alanlarda çalışan araştırmacılar kesirli hesaplama yöntemime yönelmiştir.
Kaos kelimesi temel manada bir düzensizlik halini ifade etmekte kullanılır. Bilimde ise doğrusal bir karakteristik sergilemeyen sistemlere kaotik sistemler denir. Kaos teorisi temel olarak başlangıç koşullarına karşı çok yüksek hassaslık içeren dinamik sistemleri kapsar [6]. Bu kesir dereceli sistemlerden bazıları; Lü sistemi [7] ,Chen sistemi [8],Chua sistemi [9], Liu [10] ve Rössler [11] gibi sistemlerdir. Kaotik sistemler de ayrıca bilgi işlem, hesaplama, telekomünikasyon, mühendislik gibi birçok alanda kullanılmaktadır.
Bu çalışmada daha önce kullanılan örnekleme yöntemlerinden farklı olarak Labview ortamında Dadras-Momeni sisteminin kesir dereceli analizi yapılmıştır.

2. Kesir Dereceli Hesaplama

Kesir dereceli integral ve türev için birkaç temel tanım vardır. Bunların arasında en popüler olanlardan bir tanesi Riemann-Liouville (RL) tanımıdır [12-13]. Riemann-Liouville (RL) denklemi $n-1 < \alpha < n$ şartını sağlayan denklem (1)'de belirtilmiştir. Γ() gamma fonksiyonudur. Denklem (1)' de verilen a ve t işlemin sınırlarını belirtmektedir ve sistemin derecesini belirten bir reel sayı olan α ise temel operatör olan ${}_aD_t^{\alpha}$'yi ; $R(\alpha) > 0$ durumunda türev operatörüne (d^{α}/dt^{α}), $R(\alpha) < 0$ durumunda integral operatörüne ($\int_a^t (dt)^{-\alpha}$) çevirir. $\alpha = 1$ durumunda ise temel operatör olan ${}_aD_t^{\alpha}$'yi 1 değerine eşitler ve böylece tam sayı dereceli bir sitem olmuş olur.

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mathrm{n}-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \tag{1}$$

Riemann-Liouville 'nin kesir dereceli operatörünün Laplace dönüşümü yapıldıktan sonra başlangıç koşulları sıfır olarak alınıldığında formül $\mathcal{L}[D^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha} F(s)$ şeklinde sadeleşir.

Bundan dolayı kesir dereceli integral operatörünün derecesi olan "α " ile birlikte $f(t)$ 'nin Laplace dönüşümü, frekans domeninde transfer fonksiyonu olarak $F(s) = 1/s^{\alpha}$ şeklinde tanımlanır.

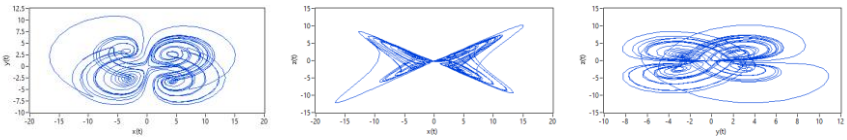
Bu çalışmada kesir dereceli integralin derecesini hesaplamak için tam sayılı yaklaşım yöntemi kullanılmıştır. Tam sayılı yaklaşım yöntemi, kesirli derecenin yaklaşık olarak tam sayılı transfer fonksiyonu elde edilerek oluşturulan bir yöntemdir [14].

3. Kesir Dereceli Dadras-Momeni Sistemi

Sara Dadras ve Hamid Reza Momeni tarafından Dadras-Momeni sistemi tasarlanmıştır [15]. Denklemde klasik olan türevi kesir dereceli türev ile değiştirirsek denklem (2)' deki gibi kesir dereceli bir sistem elde ederiz.

$$\frac{d^{\alpha_1}}{dt^{\alpha_1}} = y - ax + byz, \quad \frac{d^{\alpha_2}}{dt^{\alpha_2}} = cy - xz + z, \quad \frac{d^{\alpha_3}}{dt^{\alpha_3}} = dxy - hz \tag{2}$$

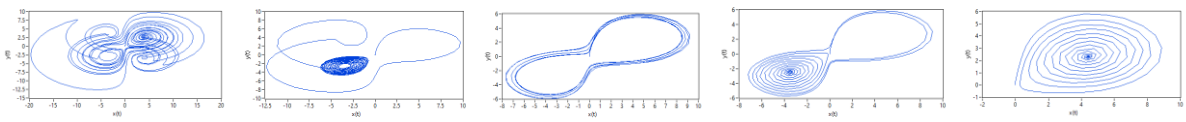
Bu sistemde x, y, z durum değişkenleri ve a, b, c, d, h ise sistem parametreleridir. Bu denklemlerde $0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leqslant 1$ kesirli dereceyi ifade etmektedir. Sistemin yörüngesinin 2 boyutlu geometrik çizimi şekil 1. de verilmiştir.



(a) (c) (b)

Şekil 1. Denklem (2)'de bulunan sistemin α =0.9 kesir derecesi ile x-y (a), x-z (b), y-z(c) düzlemi faz çizimi.

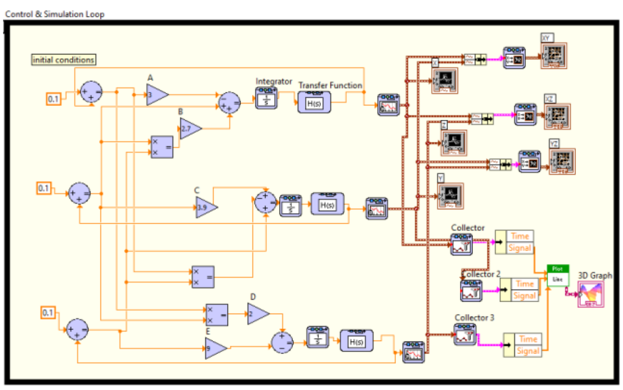
Bu sistem (2)' de ki parametrelerin değiştirilmesiyle iki, üç veya dört kıvrımlı kaotik davranış gözlemlenebilir. Bu çalışmada 4 kıvrımlı kaotik davranış gösteren parametreler seçilmiştir. Sistem, a=3, b=2.7, c=3.9, d=2 ve h=9 parametreleri ve α =0.9 kesir derecesi ile dört kıvrımlı kaotik özellik göstermektedir.



(a) (b) (c) (d) (e)

Şekil 2. Denklem (2)'de bulunan sistemin α =0.80 (a), α =0.75 (b), α =0.70(c), α =0.68(d) ,α =0.65(e) kesir derecesi ile x-y düzlemi faz çizimleri.

Sistemin kesir derecesi α =0.9'dan daha küçük olarak sırasıyla büyükten küçüğe doğru α =0.8, α =0.75, α =0.70 gibi seçildiğinde sistem kaotik özelliğini yitirmeye başladığı gözlemlenmiştir. Bundan dolayı kesir dereceli olarak, sistemin en verimli şekilde kaotik davranış göstermesini sağlayan en küçük kesirli derece α =0.9'dır.



Şekil 3. Dadras-momeni sistemi kesir dereceli Labview modeli.

4. Sonuç

Kesir dereceli sistemlerin uygulamalarının yapılması için bazı farklı programlama yazılımları bulunmaktadır. Bu çalışmada bunlardan farklı olarak Labview ortamında simülasyonu yapıldı ve kesir dereceli Dadras-Momeni sisteminin kesirli derece ile kaotik özelliği gösterdiği saptandı. Kesir dereceli Dadras-Momeni sisteminin derecesi kademeli olarak düşürülerek farklı değerdeki derecelerin nasıl bir kaotik davranış sergilediği gözlemlendi. Sistemde kesirli derecenin belli bir değerden sonra kaotik davranış yaratmadığı gözlemlendi.

5.Kaynaklar

[1]. Podlubny I., “Fractional Differential Equations”, Academic Press, New York, 1999.

[2]. Hifler R.,“Applications of Fractional Calculus in Physic” , World Scientific, New Jersey, 2001.

[1]. Shamim A. ve Radwan A.G.,Salama K. N., “Fractional smith chart theory” , IEEE Microw. Wirel. Compon. Lett. s.117–119 2011

[2]. Graça-Marcos M., Duarte F. B. M. ve Machado J. A. T., “Fractional dynamics in the trajectory control of redundant manipulators”, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul, 2008.

[3]. Said L. A.,Radwan A. G., Madian A. H. ve Soliman A.M., “Fractional-order inverting and non-inverting filters based on CFOA”, 39th International Conference on Telecommunications and Signal Processing, TSP 2016

[4]. Said L. A., Ismail S. M., Radwan A.G., Madian A .H., Abu El-Yazeed M.F. ve Soliman A. M., “On the optimization of fractional order low-pass filters, Circuits Syst”, Signal Process, 2016.

[5]. Petras I., “ Fractional-order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation”, Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

[6]. Williams G. P., “ Chaos Theory Tamed ” Joseph Henry Press Washington, D.C, 1997.

[7]. Lu J. G., “Chaotic dynamics of the fractional-order Lü system and its synchronization”, Physics Letters A. s. 305-311,2006

[8]. Lu, J. G. ve Chen, G., “ A note on the fractional-order Chen system”,Chaos, Solitons & Fractals. s. 685-688. 2005

[9]. Zhu H.,,Zhou, S. ve Zhang, J., “Chaos and synchronization of the fractional-order Chua’s system. ”, Chaos Solitons & Fractals , s.595-1603, chaos.2007.

[10]. Gejji, V. ve Bhalekar, S., “Chaos in fractional ordered Liu system. Computers & Mathematics with Applications”, s.1117-1127, .2009.

[11]. Zhang W., Zhou S., Li H. ve Zhu H., “ Chaos in a fractional-order Rössler system”. Chaos Solitons Fract, s.1684–1691, 2009

[12]. Butzer P. L., Westphal U., “ An introduction to fractional calculus ”,World Scientific, Singapur (2000)

[13]. Kenneth S.M. Bertram, R. “ An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations” Wiley Interscience, ABD (1993)

[14]. Deniz F.N., Alagoz B.B., Tan N. ve Atherton D.P., "Integer Order Approximation Method Based on Stability Boundary Locus for Fractional Order Derivative/Integrator Operators", ISA Transactions, 2016.

[15]. Dadras S. ve Momeni, H. R., “ A novel three-dimensional autonomous chaotic system generating two, three and four-scroll attractors”, Physics Letters , s.3637-3642,2009,