

İki Boyutlu Sonlu Elemanlar İle Modal Çözümleme Probleminin Genelleştirilmiş Özdeğer/Özvektör Pertürbasyonu Problemine İndirgenmesi

Serkan Günel

E. Yeşim Zoral

Dokuz Eylül Üniversitesi Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü

Tınaztepe Kampüsü, Buca, İzmir

serkan.gunel@deu.edu.tr

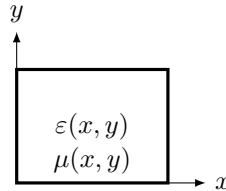
yesim.zoral@deu.edu.tr

Özet: Bu çalışmada, parametrik hesaplama probleminin çözümünde yeni bir yaklaşım olan özdeğer/ özvektörlerin adım adım pertürbasyonu yöntemini sonlu elemanlar yöntemi ile birleştirerek, iki boyutlu dalga kılavuzu yapılarına ilişkin modların pertürbasyon altında nasıl değiştiği incelenmiştir. Teorik çerçevede sonlu elemanlar yöntemi ile, adım adım özdeğer pertürbasyonuna dayanan parametrik geçmiş çözümlemesi yaklaşımının tümleştirilebilmesi için, öncelikle sonlu elemanlar yöntemi ile modellenmiş pertürbasyonların simetrik bir özdeğer pertürbasyonu problemine dönüştüğü gösterilmiştir.

1 Giriş

Mikrodalga uygulamalarında sıklıkla karşılaşılan rezonans yapılarının çözümlemesi problemi, bir genelleştirilmiş özdeğer probleminin sayısal çözümüne indirgenmektedir. Problemin çözümü ile elde edilen özvektörler yapının modlarına, özdeğerler ise mod frekanslarına karşılık gelmektedir. Bu yapıların verilen bir parametreye göre en iyilemesi problemi, parametrik olarak verilen bir genelleştirilmiş özdeğer/özvektör problemine dönüşür. Bu çalışmada genelleştirilmiş özdeğer/özvektör problemi olarak modellenebilen elektromanyetik rezonans problemleri incelenmiştir. Bu tip problemlere en temel örnek dalga kılavuz yapılarıdır. Bu nedenle temel formülasyonu oluşturabilmek amacı ile öncelikli olarak 2 boyutlu sonlu elemanlar ile modellenen dalga kılavuzu sistemleri ele alınmıştır.

İki boyutlu homojen olmayan malzeme ile doldurulmuş bir dalga kılavuzunu ele alalım (Şekil 1).



Şekil 1: Homojen olmayan dalga kılavuzunun kesiti

Dalga kılavuzu içindeki alanların z yönündeki bileşenlerinin

$$\mathcal{L} \triangleq \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varepsilon}{k_t^2} \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\varepsilon}{k_t^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) & \frac{k_z}{\omega} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{k_t^2} \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k_t^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \\ \frac{k_z}{\omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k_t^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{k_t^2} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] & -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu}{k_t^2} \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{k_t^2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \quad (1a)$$

$$\mathcal{M} \triangleq \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad \Phi \triangleq \begin{bmatrix} E_z \\ H_z \end{bmatrix} \quad (1b)$$

operatörleri tanımlanırsa,

$$(\mathcal{L} - \mathcal{M})\phi = 0 \quad (2)$$

kısmi diferansiyel denklem sistemini sağladığı gösterilebilir. \mathcal{L} ve \mathcal{M} self-adjoint operatörlerdir. Dalga kılavuzunun içindeki süreksizliklerde, aşağıdaki fonksiyonelin tek minimumunun alanlara ilişkin sınır koşullar da göz önünde bulundurulduğunda (2) 'i sağladığı gösterilebilir [7].

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{k_t^2} \left[\varepsilon \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} \right)^2 \dots \right. \\ \left. + 2 \frac{k_z}{\omega} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - k_t^2 \varepsilon E_z^2 - k_t^2 \mu H_z^2 \right] d\Omega \quad (3)$$

Burada Ω kesit alanını göstermekte ve $k_t^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - k_z^2$ ve k_z z yönündeki yayılma sabitidir.

Ω 'nın Ω^e ile gösterilen M tane birbiri ile örtüşmeyen üçgensel alt bölme ayrıldığını varsayalım. E_i^e ve H_i^e , ($i = 1, 2, 3$), e 'inci üçgensel elemanların köşelerini oluşturan düğümlerdeki alan değerlerini ve $N_i^e(x, y)$ düğümler arasındaki alan değerini veren interpolasyon fonksiyonunu gösterebiliriz. Şu halde (2) kısmi diferansiyel denklem takımının çözümü ϕ , $\mathbf{A}^e = [a_{ij}^e]$, $\mathbf{A}'^e = [a'_{ij}^e]$, $\mathbf{B}^e = [b_{ij}^e]$, $\mathbf{B}'^e = [b'_{ij}^e]$, $\mathbf{C}^e = [c_{ij}^e]$ ve $\mathbf{C}'^e = [c'_{ij}^e]$ tanımları yapılırsa her e elemanı için yaklaşık olarak

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}^e & \mathbf{C}^e \\ \mathbf{C}^{eT} & \mathbf{A}'^e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}'^e \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{E}_z^e \\ \mathbf{H}_z^e \end{bmatrix} = \mathbf{K}^e \phi^e = \mathbf{0} \quad (4)$$

denklem sistemini sağlar. Klasik sonlu elemanlar metodunda tüm elemanlar için yazılan denklemler süreklilik şartını sağlayacak şekilde birleştirilir ve

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{A}' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}' \end{bmatrix} \right) \bar{\phi} = \mathbf{0} \quad (5)$$

şeklinde ifade edilir. $\bar{\phi}$ tüm düğümlerde elektrik ve manyetik alanların yayılım doğrultusundaki bileşenlerinin değerlerinden oluşan bilinmeyen vektördür. Pratikte matrislerin dengesizliğini gidermek amacı ile yapılan bir ölçeklemeden sonra eleman matrislerinin bileşenleri

$$a_{ij}^e \triangleq \int_{\Omega^e} \frac{\varepsilon_r^e}{\mu_r^e \varepsilon_r^e - \delta_z^2} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) d\Omega, \quad a'_{ij}^e \triangleq \int_{\Omega^e} \frac{\mu_r^e}{\mu_r^e \varepsilon_r^e - \delta_z^2} \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) d\Omega \quad (6a)$$

$$b_{ij}^e \triangleq \int_{\Omega^e} \varepsilon_r^e N_i^e N_j^e d\Omega, \quad b'_{ij}^e \triangleq \int_{\Omega^e} \mu_r^e N_i^e N_j^e d\Omega \quad (6b)$$

$$c_{ij}^e \triangleq \int_{\Omega^e} \frac{\delta_z}{\mu_r^e \varepsilon_r^e - \delta_z^2} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} - \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right) d\Omega, \quad c'_{ij}^e \triangleq \int_{\Omega^e} \frac{\delta_z}{\mu_r^e \varepsilon_r^e - \delta_z^2} \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} - \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) d\Omega, \quad (6c)$$

$i, j = 1, 2, 3$ şeklinde yazılabilir. ε_r^e ve μ_r^e , Ω^e içindeki göreceli dielektrik ve manyetik geçirgenlik katsayılarını göstermektedir [7]. Gerekli cebrik düzenlemelerden sonra sistem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}'^T & \mathbf{A}' \end{bmatrix} \bar{\phi} = \lambda(\delta_z) \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}' \end{bmatrix} \bar{\phi}, \quad \lambda(\delta_z) = k_0^2, \quad \delta_z \neq 1, \delta_z \neq \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \quad \text{veya} \quad (7a)$$

$$\mathbf{L}_0 \bar{\phi} = \lambda \mathbf{M}_0 \bar{\phi} \quad (7b)$$

formunda *genelleştirilmiş bir özdeğer/özvektör problemi* halini alır. Burada denklemin sağ ve sol yanında elde edilen matrisler simetrik, bol sıfırlı band matrisler biçimindedir.

(7) probleminin etkin olarak çözümü için pek çok algoritma mevcuttur [1, 3, 4, 10]. Matrislerin simetri özellikleri nedeni ile özellikle etkin hesaplamalar yapılabilmektedir [6]. Verilen bir δ_z değeri için dalga kılavuzunun modları özvektörlere, modların yayılma katsayıları ise özdeğerlerin kareköklerine karşılık gelir. Genelleştirilmiş özdeğer/özvektör probleminin çözümü ile modal çözümleme yapılmış olur. Burada önemli bir hata kaynağı \mathcal{L}

ve \mathcal{M} sürekli operatörlerinin ayrıklaştırılması neticesinde ortaya çıkmaktadır. Hatanın küçük olması için çok sayıda elemana ihtiyaç duyulur. Bu da genel olarak $O(M^3)$ 'lük genelleştirilmiş özdeğer/özvektör probleminin çözümünü gerektirdiğinden [1], sistemde yapılacak parametrik değişikliklerin takibi ve/veya eniyilemesi için problemin tekrar tekrar çözülmesi zaman alıcıdır. Bu nedenle daha önce çözülmüş bir sistemin çözümleri kullanılarak, pertürbe edilmiş sistemin çözümlerinin elde edilmesi etkin olabilir.

2 İki Boyutlu FEM ve Genelleştirilmiş Özdeğer/Özvektör Pertürbasyonu

Kolaylık için, başlangıçta dalga kılavuzunun içinin $\varepsilon_r^e = \varepsilon_r$ ve $\mu_r^e = \mu_r$ olacak şekilde homojen olarak doldurulmuş olduğunu, daha sonra $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ içindeki elemanların göreceli dielektrik katsayılarının $\tilde{\varepsilon}_r^e = \tilde{\varepsilon}_r$ ile değiştirildiğini ancak göreceli manyetik geçirgenliklerinin aynı kaldığını, varsayalım. ε_r , $\tilde{\varepsilon}_r$ ye giderken çözümlerin her ara değerinde ne şekil aldığını incelemek istiyoruz. Bu değişimi ifade etmek için

$$h(p) = 1 - p(1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_r}{\varepsilon_r}), \quad p \in [0, 1] \quad \text{dersek} \quad \tilde{\varepsilon}_r^e(p) = \begin{cases} h(p)\varepsilon_r, & \Omega^e \subset \tilde{\Omega} \\ \varepsilon_r, & \Omega^e \subset \Omega \setminus \tilde{\Omega} \end{cases} \quad (8)$$

yazabiliriz. Açık ki $p = 0$ pertürbasyon olmayan durumu, $p = 1$ ise pertürbe edilmiş durumu göstermektedir. Bu şartlar altında eleman matrislerinin bileşenleri malzeme özelliklerine bağlı bir katsayı ile elemanın geometrisine ve seçilen interpolasyon fonksiyonlarına bağlı integrallerin çarpımı formundadır. İnterpolasyon fonksiyonları bilindiğinden bu integraller kapalı formda ifade edilerek aşağıdaki matrisler kolaylıkla hesaplanabilir.

$$\mathbf{P}^e \triangleq \left[\int_{\Omega^e} N_i^e N_j^e d\Omega \right], \quad \mathbf{Q}^e \triangleq \left[\int_{\Omega^e} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} d\Omega \right], \quad \mathbf{R}^e \triangleq \left[\int_{\Omega^e} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} d\Omega \right] \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (9)$$

Bu durumda eleman matrisleri de parametrik olarak

$$\mathbf{A}^e(p) = \frac{\tilde{\varepsilon}_r^e(p)}{\mu_r^e \tilde{\varepsilon}_r^e(p) - \delta_z^2} \mathbf{Q}^e, \quad \mathbf{A}'^e(p) = \frac{\mu_r^e}{\mu_r^e \tilde{\varepsilon}_r^e(p) - \delta_z^2} \mathbf{Q}^e \quad (10a)$$

$$\mathbf{B}^e(p) = \tilde{\varepsilon}_r^e(p) \mathbf{P}^e, \quad \mathbf{B}'^e(p) = \mu_r^e \mathbf{P}^e \quad (10b)$$

$$\mathbf{C}^e(p) = \frac{\delta_z}{\mu_r^e \tilde{\varepsilon}_r^e(p) - \delta_z^2} (\mathbf{R}^e - \mathbf{R}^{eT}), \quad \mathbf{C}'^e(p) = \frac{\delta_z}{\mu_r^e \tilde{\varepsilon}_r^e(p) - \delta_z^2} (\mathbf{R}^{eT} - \mathbf{R}^e) = \mathbf{C}^{eT}(p) \quad (10c)$$

şeklinde ifade edilebilir. \tilde{k}_0^2 pertürbe edilmiş özdeğer ve pertürbe edilmiş $\tilde{\phi}^e$ özvektör bileşenleri olmak üzere eleman derleme işlemi sonucunda problem

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\mu_r \varepsilon_r - \delta_z^2} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \mathbf{Q} & \delta_z (\mathbf{R} - \mathbf{R}^T) \\ \delta_z (\mathbf{R}^T - \mathbf{R}) & \mu_r \mathbf{Q} \end{bmatrix} \dots \right. \\ & + \frac{\varepsilon_r (1 - h(p))}{(\mu_r \varepsilon_r - \delta_z^2)(\mu_r \varepsilon_r h(p) - \delta_z^2)} \begin{bmatrix} \delta_z^2 \mathbf{JQ} & \mu_r \delta_z \mathbf{J}(\mathbf{R} - \mathbf{R}^T) \\ \mu_r \delta_z (\mathbf{R}^T - \mathbf{R}) \mathbf{J}^T & \mu_r^2 \mathbf{JQ} \end{bmatrix} \dots \\ & \left. - \tilde{k}_0^2 \left(\begin{bmatrix} \varepsilon_r \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mu_r \mathbf{P} \end{bmatrix} - (1 - h(p)) \varepsilon_r \begin{bmatrix} \mathbf{JP} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \right) \tilde{\phi} = \mathbf{0} \quad (11) \end{aligned}$$

veya kısaca

$$[\mathbf{L}_0 + f(p)\mathbf{L}_p] \tilde{\phi}(p) = \tilde{\lambda}(p) [\mathbf{M}_0 + g(p)\mathbf{M}_p] \quad (12)$$

biçimini almıştır. \mathbf{L}_p ve \mathbf{M}_p matrislerinin \mathbf{L}_0 ve \mathbf{M}_0 matrisleri cinsinden elde edilebildiğine ve pertürbasyon bölgesinin boyutlarına bağlı olarak genel olarak daha bol sıfırlı olduklarına dikkat edilmelidir.

Bu haliyle yeni bir *genelleştirilmiş özdeğer/özvektör* problemi söz konusudur. p 'nin sabit değerleri için çözümleme pertürbasyon bölgesindeki malzemenin değişik değerlerine karşılık gelen modları ve frekansları verecektir.

Ancak bu hali ile problem (7) probleminden farksızdır dolayısı ile çözümü aynı miktarda hesaplama eforu gerektirir. Eğer p 'nin tüm aralıktaki değerleri için frekansların ve modal alanların nasıl etkilendiği incelenmek istenirse, $[0, 1]$ aralığı alt aralıklara bölünüp, her aralık için problem tekrar çözülerek parametrik değişim incelenebilir. Ancak çok sayıda sonlu eleman ve yüksek hassasiyet gerektiğinde, K adım sayısını göstermek üzere bu $\mathcal{O}(KM^3)$ algoritmik karmaşıklıkta bir problem olacaktır. Pratikte az sayıda seçilmiş mod için çözümlerin nasıl değiştiği önemlidir. Bu noktada $p = 0$ 'daki çözümün bir sonraki adımda nasıl değiştiğini incelemek için, sonraki adımdaki çözümleri bilinen çözümler cinsinden ifade ederek problemi etkin bir şekilde çözmek mümkündür [12, 11, 8, 2].

Pertürbasyon sonrası sistem ile özgün sistemin özellikleri arasındaki fark çok ise (12)'ün çözümlerini (7)'un çözümleri cinsinden doğrudan yazmak mümkün değildir. Öte yandan pertürbasyon küçük doğrusal adımlara bölünerek istenildiği kadar küçük hata ile (12) çözümlenebilir [5, 9].

3 Sonuç

Bu çalışmada, iki boyutlu sonlu elemanlarla modellenebilecek elektromanyetik rezonans problemlerinin, seçilen bir bölgede malzeme özelliklerinin değişmesi halinde, problemin özdeğer/özvektör pertürbasyonu problemine dönüştüğü gösterilmiştir. Elde edilen sonlu elemanlar pertürbasyon matrisleri, pertürbe edilmemiş sistemin sonlu eleman pertürbasyon matrisleri cinsinden ifade edilebildiğinden, söz konusu tipteki problemlerin çözümleri, orjinal problemin çözümleri cinsinden adım adım pertürbasyon tekniği kullanılarak etkin bir şekilde hesaplanabilir.

Bu çalışma 111E059 proje numarası ile Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından desteklenmektedir.

Kaynaklar

- [1] Z. Bai, J. Demmel, J. Dongarra, A. Ruhe, and H. van der Vorst and, editors. *Templates for the solution of algebraic eigenvalue problems : A Practical Guide*. SIAM, Philadelphia, 2000.
- [2] H. Baumgärtel. *Analytic Perturbation Theory for Matrices and Operators*, volume 15 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Berlin, Germany, 1984.
- [3] J. W. Demmel and B. Kågström. The generalized Schur decomposition of an arbitrary pencil $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}$ —Robust software with error bounds and applications. Part I: Theory and algorithms. *ACM Trans. Math. Softw.*, 19(2):160–174, 1993.
- [4] J. W. Demmel and B. Kågström. The generalized Schur decomposition of an arbitrary pencil $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B}$ —Robust software with error bounds and applications. Part II: Software and applications. *ACM Trans. Math. Softw.*, 19(2):175–201, 1993.
- [5] S. Günel and E. Y. Zoral. Parametric history analysis of resonance problems via step-by-step eigenvalue perturbation technique. *IET Microwave, Antennas & Propagation*, 4(4):466–476, April 2010.
- [6] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1999.
- [7] J. Jin. *The finite element method in electromagnetics*. John Wiley and Sons, Inc., 2nd edition, 2002.
- [8] T. Kato. *Perturbation Theory of Linear Operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2nd edition, 1995.
- [9] Z. H. Lü, C. Shao, and Z. D. Feng. High accuracy step-by-step perturbation method of the generalized eigenvalue problem and its application to parametric history analysis of structural vibration characteristics. *Journal of Sound and Vibration*, 164(3):459–469, July 1993.
- [10] C. B. Moler and G. W. Stewart. An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 10(2):241, April 1973.
- [11] T. Zhang, G. H. Golub, and K. H. Law. Eigenvalue perturbation and generalized Krylov subspace method. *Technical report SCCM-98-01, Dept. of Computer Science, Stanford University*, 1998.
- [12] T. Zhang, G. H. Golub, and K. L. Law. Subspace iterative methods for eigenvalue problems. *Linear Algebra and its Applications*, 294:239–258, 1999.