

Çok Seviyeli Hızlı Çokkutup Yöntemi için Paralel Seyrek Yaklaşık Ters Öniyleştiricisi [†]

Tahir Malas¹ ve Levent Gürel^{1,2}

¹Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü

²Bilişimsel Elektromanyetik Araştırma Merkezi (BİLCEM)

Bilkent Üniversitesi, Ankara, 06800

E-posta: tmalas@ee.bilkent.edu.tr, lgurel@bilkent.edu.tr

Özet: Gerçek hayatta karşılaşılan büyük elektromanyetik saçılım ve ısıtım problemlerinin paralel çözümlerinde çok seviyeli hızlı çokkutup yönteminin etkinliğini artırabilmek amacı ile paralel seyrek yaklaşık ters (SYT) öniyleştiricisi gerçekleştirilmiştir. Bu sayede, basit öniyleştiricilerle çözülemeyen açık yüzeylere sahip büyük ölçekli geometrilerin çözümü mümkün olmuştur. Ayrıca, kapalı yüzeylere sahip nesnelerde kullanılan birleşik alan integral denkleminde de SYT'nin çok yönlü aydınlatma problemlerinde önemli avantaj sağladığı gösterilmiştir.

1. Giriş

Büyük ölçekli elektromanyetik saçılım ve ısıtım problemleri, çok seviyeli hızlı çokkutup yöntemi (ÇSHÇY) (MLFMA: multilevel fast multipole algorithm) [1] kullanılarak, kısa sürede ve makul bellek gereksinimleriyle çözülebilmektedir. Bu yöntemin paralelleştirilmesi ile beraber, ulaşılabilen bilinmeyen sayısı daha da artmıştır. Ancak, özellikle açık geometrilerin çözümünde kullanılması kaçınılmaz olan elektrik alan integral denkleminin (EAİD) için iterasyon sayıları çok yüksek olabilmekte, dolayısıyla çözüm zamanı çok uzamakta ve hatta yakınsama elde edilememektedir. Bu yüzden paralelleştirilebilen, güçlü öniyleştiricilere ihtiyaç bulunmaktadır.

ÇSHÇY ile hafızada yalnızca seyrek yakın alan matrisi $\bar{Z}^{VA}$ tutulmaktadır. İterasyon sayılarını düşürebilmek için bu matrisin içerdiği tüm bilgiyi verimli bir şekilde kullanmak gerekmektedir. Yaygın olarak kullanılan eksik LU (ELU) (ILU: incomplete LU) öniyleştiricisi, yakın alan matrisinin çarpanlarına yaklaşık olarak ayrışımıyla elde edilmektedir. ELU'nun uygulanması, yaklaşık LU çarpanlarının geri ve ileri çözümleriyle yapılmaktadır. Ancak bu öniyleştiricinin verimli bir şekilde paralelleştirilmesi, LU çarpanlarının çözümündeki geri ve ileri çözümlerlerden dolayı mümkün olmamaktadır. Bu yüzden, yakın alan matrisinin tersine doğrudan yaklaşan seyrek yaklaşık ters (SYT) (SAI: sparse approximate inverse) öniyleştiricisi kullanılmaktadır [2].

2. Seyrek Yaklaşık Ters Öniyleştiricileri

Seyrek matrislerde yaygın olarak kullanılan ELU'dan farklı olarak, SYT öniyleştiricileri sistem matrisinin tersine doğrudan yaklaşmaktadır. ÇSHÇY bağlamında ise bu yaklaşım $\bar{S} \approx (\bar{Z}^{VA})^{-1}$ şeklinde olmaktadır. Bizim gerçekleştirdiğimizde, yakın alan matrisi ve SYT,

$$\bar{Z}^{VA} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_1^{VA} \\ \vdots \\ \bar{Z}_k^{VA} \\ \vdots \\ \bar{Z}_K^{VA} \end{bmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_1 \\ \vdots \\ \bar{S}_k \\ \vdots \\ \bar{S}_K \end{bmatrix} \quad (1)$$

şeklinde K satır bloğuna bölünmüş ve her bir işlemciye bir blok gelecek şekilde dağıtılmıştır. SYT'nin uygulanması seyrek matris-vektör çarpımı $y = \bar{S} \cdot x$ şeklinde olmaktadır. Uygulama işleminin paralelleştirilmesi verimli bir şekilde yapılabilir. Ancak, SYT'nin paralel oluşturulması esnasında her bir

[†] Bu çalışma, TÜBİTAK (105E172), Türkiye Bilimler Akademisi (LG/TÜBA-GEBİP/2002-1-12), ASELSAN ve SSM tarafından desteklenmektedir.

matris satır için QR ayrışımı ve işlemciler arası haberleşme gerekebilmekte ve bu yüzden öniyleştiricinin oluşturulması çok yüksek zaman alabilmektedir. Bu zamanı en aza indirmek için uygun algoritma ve veri yapıları kullanılmalıdır.

Yakın alan matrisine yaklaşım $\|\bar{I} - \bar{S} \cdot \bar{Z}^{YA}\|_F$ 'nın enküçültmesi şeklinde yapılmaktadır. Bu enküçültmede $\bar{S}$ üzerine bir sınırlama getirilmezse $\bar{Z}^{YA}$ 'nın tam tersi olan yoğun bir matris elde edilir. Bizim gerçekleştirmimizde ise, $\bar{S}$ ile $\bar{Z}^{YA}$ 'nın ötürüntüleri aynı tutularak SYT'nin seyrek olması sağlanmıştır. Frobenius normun özelliğinden dolayı bu yaklaşım birim matrisin ve $\bar{S}$ 'nin satırları cinsinden

$$\|\bar{I} - \bar{S} \cdot \bar{Z}^{YA}\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \|e_i - s_i \cdot \bar{Z}^{YA}\|_2^2 \quad (2)$$

şeklinde ifade edilebilmekte ve dolayısıyla en küçültme işlemi her bir satır için bağımsız yapılabilir. Ancak, bu enküçültme işleminden önce, matrisler satır blokları şeklinde bölündüğü için her bir işlemcinin kendisinde olmayan ama SYT'nin yapısında ihtiyaç duyacağı satırları diğer işlemcilerden alması gerekmektedir. Bu haberleşme için kullanılan algoritmaya ait sözde-kod Şekil 1'de verilmiştir. Satırlara ait sütun indeksi ve sıfırdan farklı elemanların değış tokuşu da benzer şekilde yapılmıştır.

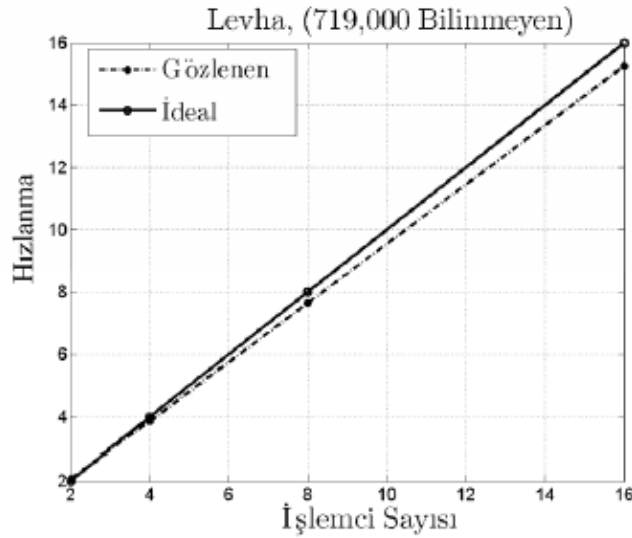
```

her  $Z_{ij} \in \bar{Z}_k$  için
    eğer  $j$  işaretlenmemişse
         $p = \text{işlemciBul}(j)$ 
         $j$ 'yi gelenSatırListesi[ $p$ ]'ye ekle
         $j$ 'yi işaretle
gelenSatırListe'lerini yolla, gidenSatırListe'lerini al (herkesten-herkese iletişim)

```

Şekil 1. SYT'nin oluşturulmasında kullanılan sözde-kod.

SYT oluşturulurken yakın alan matrisi ve öniyleştirici seyrek satır formatında tutularak haberleşmelerin yer-içi (in-place) olması sağlanmıştır. Öniyleştiricinin oluşturulmasında ayrıca, ÇSHÇY'nin blok yapısı kullanılarak gerekli QR çarpanlarına ayırma sayısı ciddi oranda düşürülmüştür. Sonuç olarak, SYT'nin oluşturma aşaması verimli bir şekilde paralelleştirilmiştir.



Şekil 2. Levha geometrisi için paralel hızlanma grafiği.

3. Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde önce SYT'nin oluşum aşamasının paralel performansı gösterilecektir. Daha sonra, EAİD ve BAİD için öniyleştirme performansı sunulacaktır. Şekil 2'de SYT'nin oluşum aşamasının iletişim zamanı ve hızlanması 719,000 bilinmeyene sahip bir levhaya ait EAİD matrisi için verilmiştir. Paralelleştirme işleminin verimli bir şekilde yapıldığı görülmektedir.

SYT'nin EAİD ve BAİD için öniyleştirme performansını test etmek amacı ile Tablo 1 ve Tablo 2'de görülen GMRES'le elde edilen çözümler gösterilmiştir. Tablo 1'deki açık geometriler öniyleştiricisiz veya diyagonal gibi basit bir öniyleştirici ile çözülememiş; ancak SYT kullanılarak makul sürelerde çözüme ulaşılmıştır. BAİD içinse paralelleştirilebilen blok-diyagonal öniyleştiricisi de kıyaslama amacı ile sunulmuştur. Tablo 2'deki Flamme geometrisi radara görünmez (stealth) bir füze aittir [3]. Elektromanyetik uygulamalarda değişik yönlerden gelen düzlem dalgaları için çözümlere ihtiyaç duyulmaktadır, bu da aynı sistemin çok sayıda sağ taraf vektörü ile çözümünü gerekli kılmaktadır. SYT ile toplam çözüm zamanı blok-diyagonale kıyasla düşmese de, çözüm zamanı çok daha kısa olduğu için çok yönden aydınlatma gereksinimlerinde önemli bir avantaj getireceği açıktır.

EAİD		SYT			
Geometri	Bilinmeyen sayısı	İter	Zaman		
			Yapım	Çözüm	Toplam
Levha	719,000	193	214	3,673	3,887
Açık Prizma	409,514	302	331	4,016	4,346
Yarım Küre	116,596	160	78	456	534
Açık küp	171,655	398	287	691	977
Yansıtıcı Anten	356,439	130	972	843	1,815

Tablo 1. EAİD için saniye cinsinden çözüm zamanları.

BAİD		Blok Diyagonal				SYT				
Geometri	Bilinmeyen Sayısı	İter	Yapım	Çözüm	Toplam	İter	Yapım	Çözüm	Toplam	nSTV
Küre	829,881	40	0.18	882	882	37	532	838	1,370	12
İnce Kutu	147,180	104	0.14	352	352	63	304	218	522	3
Kanat	117,945	53	0.05	98	98	38	192	73	264	8
Helikopter	739,404	107	0.30	3,698	3,699	77	1,840	2,739	4,578	2
Flamme	895,407	185	0.68	8,096	8,097	151	3,239	6,588	9,827	3

Tablo 2. BAİD için saniye cinsinden çözüm zamanları. "nSTV" SYT için yapım zamanını blok-diyagonale kıyasla kompanse eden sağ taraf vektörü sayısını vermektedir.

Kaynaklar

- [1] Lu C.-C. ve Chew W.C., "Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, cilt 45, no. 10, s. 1488-1493, Ekim 1997.
- [2] Saad Y., *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM, Philadelphia, ABD, 2003.
- [3] Gürel L., Bağcı H., Castelli J.-C., Cheraly A. ve Tardivel F. "Validation through comparison: Measurement and calculation of the bistatic radar cross section of a stealth target," *Radio Science*, cilt 38, no. 3, s. 1046-1058, 2003.