Büyük İntegral Denklemi Problemlerinin Paralel Çok Seviyeli Hızlı Çokkutup Yöntemiyle Çözümü†

Levent Gürel[1,2], Özgür Ergül[1] ve Tahir Malas[1]
[1]Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
[2]Bilişimsel Elektromanyetik Araştırma Merkezi (BiLCEM)
Bilkent Üniversitesi
TR-06800, Bilkent, Ankara
E-posta: lgurel@bilkent.edu.tr, ergul@ee.bilkent.edu.tr, tmalas@ee.bilkent.edu.tr

Özet: *Büyük elektromanyetik saçılım ve ışınım problemlerinin karmaşık üç boyutlu yapılar için güvenilir çözümleri, hem algoritmik, hem de donanımsal açıdan en son yeniliklerin takip edilmesini zorunlu kılmaktadır. Bu çalışmada, çok seviyeli hızlı çokkutup yönteminin paralelleştirilmesi ve iterasyon sayılarının etkili öniyileştiriciler kullanılarak düşürülmesi sayesinde çok büyük problemlerin kısa sürede ve yüksek doğrulukta çözülebileceği gösterilmiştir.*

1. Giriş

Bu çalışmada, gerçek hayatta karşımıza çıkan, karmaşık yapılara sahip geometrileri içeren elektromanyetik problemlerin çözümü incelenmiştir. Bu problemlerdeki geometrilerin boyutları dalgaboyu cinsinden büyük olduğundan, sayısal olarak da büyük ve zor problemlerin çözümü gerekmektedir. Bir başka deyişle, sayısal elektromanyetik problemlerin matematiksel formülasyonları sonucunda elde edilen çok büyük matris denklemlerinin çözümüne ihtiyaç vardır. Bu matris denklemleri, integral denklemlerinin ayrıklaştırılmasından elde edildiğinden yoğun matrisler içerir.

Çok büyük sayısal elektromanyetik problemlerin çözümü için hem çözüm algoritmaları, hem de bilgisayar donanımları konusundaki ilerlemelerin kullanılması gerekmektedir. Çözüm metodu olarak çok seviyeli hızlı çokkutup yöntemi (ÇSHÇY) (MLFMA: multilevel fast multipole algorithm) [1] düşük sayısal karmaşıklığı ve bellek kullanımı nedeniyle uygun bir seçimdir. Donanım olarak ise, yüksek hesaplama gücünden dolayı, parallel sistemlerinin kullanılması tercih edilen bir yoldur. Bu bağlamda, parallel sistemlerin kullanılabilmesi için, ÇSHÇY'nin paralelelleştirilmesine ihtiyaç duyulmaktadır. ÇSHÇY iteratif bir yöntem olduğundan, herhangi bir problemin çözümünde, iterasyon sayılarınının mümkün olduğunca düşük tutulmasına da ihtiyaç vardır. Çözüm için gerekli iterasyon sayısı doğal olarak çözücüye, öniyileştiriciye ve ilk tahmine bağlıdır. Buna ek olarak, iterasyon sayıları çözülen matris denkleminin temelini oluşturan özelliklere de bağlıdır. Bu özellikler, diğer pek çok parametre tarafından belirlenmektedir. Bunlara örnek olarak, formülasyon biçimi (elektrik alan, manyetik alan, veya birleşik alan yüzey koşullarının kullanımı), problem geometrisinin modellenme biçimi (açık veya kapalı geometri, keskin yüzeyler, ince yapılar, yaklaşıklama derecesi), ve ayrıklaştırma metodu (üçgenlemenin inceliği, temel ve test fonksiyonlarının seçimi) sayılabilir.

2. İntegral Denklemlerinin Paralel Çok Seviyeli Hızlı Çokkutup Yöntemiyle Çözümü

Mükemmel iletken cisimlere ait saçılım ve ışınım problemlerinin sayısal çözümleri için elektrik alan integral denklemi (EAİD) (EFIE: electric-field integral equation) ve manyetik alan integral denklemi (MAİD) (MFIE: magnetic-field integral equation) sırasıyla

$$\hat{\boldsymbol{t}} \cdot \int_S d\boldsymbol{r'} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r'}) \cdot \left(\bar{\mathbf{I}} - \frac{\nabla\nabla'}{k^2}\right) g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'}) = \frac{i}{k\eta} \hat{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{E^i}(\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

ve

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) - \hat{\boldsymbol{n}} \times \int_S d\boldsymbol{r'} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r'}) \times \nabla' g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r'}) = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H^i}(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

†Bu çalışma, TÜBİTAK (105E172), Türkiye Bilimler Akademisi (LG/TÜBA-GEBİP/2002-1-12), ASELSAN ve SSM tarafından desteklenmektedir.

şeklinde yazılabilir. Birleşik alan integral denklemi (BAİD) (CFIE: combined-field integral equation) ise EAİD ve MAİD'nin doğrusal olarak toplanmasıyla elde edilir ve

$$\text{BAİD} = \alpha \text{EAİD} + (1-\alpha)\text{MAİD} \tag{3}$$

şeklinde gösterilebilir. EAİD hem açık, hem de kapalı yüzeylere uygulanabiliyorken MAİD ve BAİD sadece kapalı yüzeylere sahip geometrilere ait problemlerin çözümünde kullanılabilirler. Bu yüzden açık geometrilerin formülasyonunda EAİD'nin kullanılması mecburidir. Öte yandan, kapalı geometrilerin formülasyonunda iç rezonans sorunlarından etkilenmediğinden ve yüksek çözülebilirlik özelliklerine sahip matris denklemleri türettiğinden BAİD tercih edilmektedir [2].

Problem geometrisinin ve integral denklemlerinin aynı anda ayrıklaştırılmasıyla birlikte

$$\sum_{n=1}^{N} Z_{mn}^{E,M,B} a_n = v_m^{E,M,B}, \qquad m = 1, 2, ..., N \tag{4}$$

şeklinde gösterilebilen $N \times N$ boyutlarında yoğun matris denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin iteratif çözümünde gerekli olan matris-vektör çarpımları ÇSHÇY sayesinde $O(N \log N)$ işlem zamanı ve bellek kullanımıyla gerçekleştirilebilmektedir. Öte yandan, pek çok gerçekçi problemin modellenmesiyle elde edilen matris denklemleri milyonlarca bilinmeyene sahiptir ve bu problemlerin çözümü için ÇSHÇY'nin parallelleştirilmesi gerekmektedir. Verimli bir parallelleştirme için ÇSHÇY'nin ağaç yapısı dikkatlice incelenmiş ve çeşitli stratejiler geliştirilmiştir [3].

3. Matris Denklemlerinin Öniyileştirilmesi

Açık geometrilerin çözümünde kullanımı zorunlu olan EAİD, özellikle büyük problemlerde tekile yakın matrisler oluşturmaktadır. Dolayısıyla, bu problemlerin çözümü düşük sayıda iterasyonlarla elde edilememektedir. Girişte bahsedilen etkenlerden, iterasyon sayısını düşüren en önemli yöntem öniyileştirmedir [4]. Öniyileştirme, sistem matrisine olabildiğince yakın, ama aynı zamanda tersi de kolay alınabilen bir $\overline{\mathbf{M}}$ matrisi seçerek asıl sistem yerine $\overline{\mathbf{M}}^{-1} \cdot \overline{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{a} = \overline{\mathbf{M}}^{-1} \cdot \mathbf{v}$ sistemini çözmek yoluyla veya sistem matrisinin tersine doğrudan yaklaşan bir $\overline{\mathbf{S}}$ matrisi oluşturup, $\overline{\mathbf{S}} \cdot \overline{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{a} = \overline{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{v}$ sistemini çözmek yoluyla olabilmektedir. Bu yöntemlerden ilkine dolaylı yaklaşım, ikincisine ise doğrudan yaklaşım metodu denmektedir.

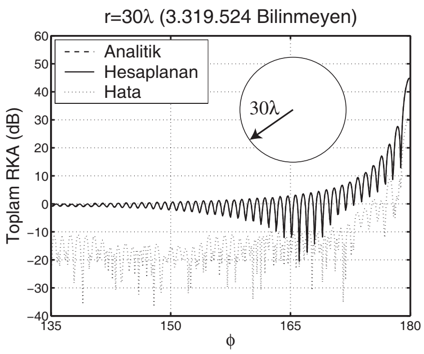
BAİD, her ne kadar çözülebilirliği yüksek matrisler oluştursa da, iterasyon sayılarının daha da düşürülmesi çözüm zamanınını kısaltmaktadır. Bu denklemlerin öniyileştirmesi, ÇSHÇY'nin son seviyedeki kümelerinin kendileriyle etkileşimlerine denk gelen diyagonal blokların tam çözümüyle elde edilmektedir. Bu metod hem ucuzdur, hem de paralelleştirilmesi çok kolaydır.

Öte yandan, EAİD ile oluşturulan matris denklemlerinin öniyileştirmesinde tüm yakın alan etkileşimlerini kullanan daha etkili yöntemlere ihtiyaç bulunmaktadır. Bu çalışmada, doğrudan yaklaşım metodlarından, seyrek yaklaşık ters (SYT) öniyileştiricileri kullanılmıştır [5]. Ayrıca, yakın alan matrisinin iteratif çözümü de öniyileştirici olarak kullanılmıştır. Ancak, çok büyük problemlerin çözümünde, yakın alan matrisi çok seyrek hale geldiği için bu yöntemler yetersiz kalmıştır. Bu yüzden, her iterasyonda ÇSHÇY kullanarak öniyileştirme yine iteratif olarak yapılmıştır. Asıl sistemin çözümünde, esnek bir çözücü olan FGMRES [5] kullanılmış ve öniyileştirmenin iterasyondan iterasyona değişmesine olanak sağlanmıştır.

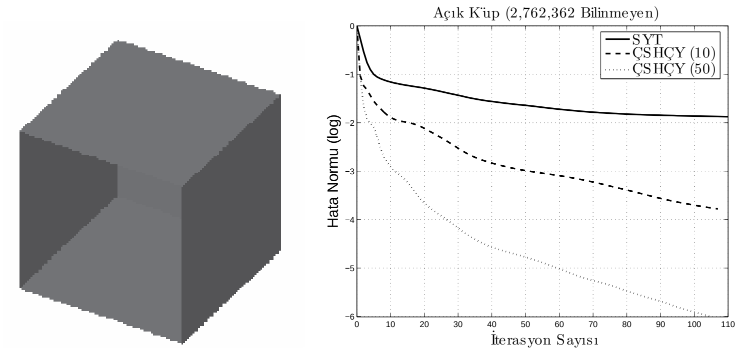
4. Sonuçlar

Kapalı yüzeylere sahip çok büyük problemlerin çözümlerine örnek olarak, Şekil 1'de 30λ yarıçapa sahip, 3,319,524 bilinmeyen içeren iletken küre için hesaplanan bistatik radar kesit alanı değerleri, Mie serilerinden elde edilen analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Doğruluğun yüksek seviyelerde olduğu gözüken bu çözüm, 16 işlemci üzerinde BAİD ve blok-diyagonal öniyileştiricinin kullanılmasıyla 29 iterasyonda elde edilmiş ve 145 dakika sürmüştür. Bir işlemcide ihtiyaç duyulan maksimum bellek kullanımı 1750 MB olmuştur.

Açık geometrilerin çözümlerine örnek olarak da yaklaşık 2,750,000 bilinmeyene sahip tek yüzü açık bir küp ve yaklaşık 350,000 bilinmeyene sahip bir yansıtıcı anten gösterilmiştir. Şekil 2'de açık küp geometrisi ve iteratif çözümüne ait hata grafiği verilmiştir. Görüldüğü gibi, bilinmeyen sayısı çok fazla olduğu için, bu problemin yüksek doğruluktaki çözümüne ancak ÇSHÇY'yi öniyileştirici olarak kullanarak varılabilmiştir. Şekil 3'te ise yansıtıcı anten, farklı öniyileştiricilere ait hata grafikleri ve problemin çözümünden elde edilen uzak alan ışınımı sunulmuştur. Öniyileştiricilerden "YA" yakın alan matrisinin iteratif çözümünü, "ÇSHÇY" ise örnekleme sayısı düşük tutulmuş daha ucuz bir ÇSHÇY kullanan iteratif çözümü simgelemektedir. Her iki çözümde de SYT öniyileştiricisi kullanılarak iç iterasyonların hızlanması amaçlanmıştır. Bunun sonucu olarak, hem iterasyon sayılarında hem de çözüm zamanında azalma sağlanmıştır. Örneğin, SYT ile sistem yaklaşık 15 dakikada çözülürken, bu süre YA'da 11 dakikaya, ÇSHÇY'de ise 7.5 dakikaya düşmüştür.

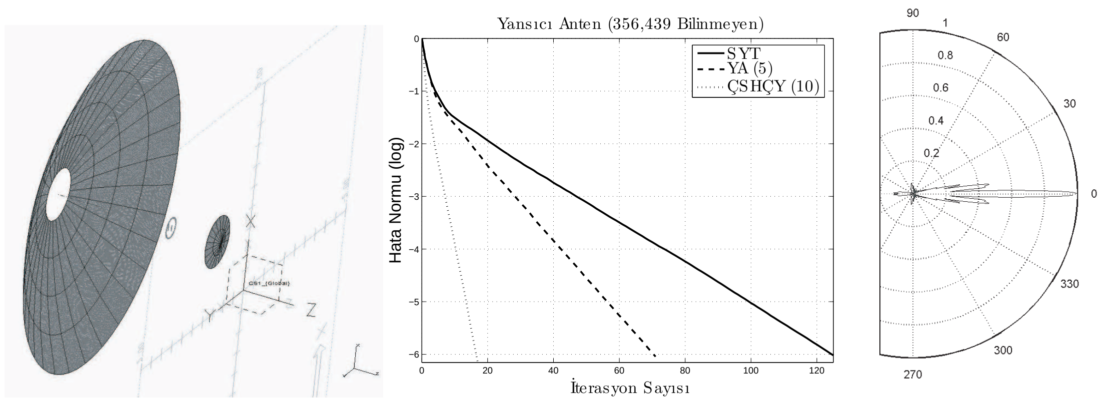


Şekil 1. Yarıçapı 30λ olan kürenin bistatik RKA değerleri.



(a) (b)

Şekil 2. (a) Açık küp geometrisi. (b) SYT ve ÇSHÇY için hata çizimleri. Parantez içindeki sayılar öniyileştirici çözümünde izin verilen en fazla iterasyon sayısıdır.



(a) (b) (c)

Şekil 3. (a) Yansıtıcı anten geometrisi. (b) SYT, YA ve ÇSHÇY için hata çizimleri. (c) Yansıtıcı antenin uzak alan ışınımı.

Kaynaklar

[1] Lu C.-C. ve Chew W.C., "Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, cilt 45, no. 10, s. 1488-1493, Ekim 1997.

[2] Ö. Ergül ve L. Gürel, "Elektromanyetik saçınım problemlerinde elektrik alan, manyetik alan ve birleşik alan integral denklemleri," *URSI-Türkiye 2002 Bilimsel Kongresi,* İstanbul, Türkiye, s. 158-161, 2002.

[3] Ö. Ergül, A. R. Bozbulut, and L. Gürel, "Çok seviyeli hızlı çokkutup yönteminin büyük elektromanyetik saçılım problemlerinin çözümü için paralelleştirilmesi," *URSI-Türkiye 2004 Bilimsel Kongresi,* Ankara, Türkiye, s. 71-73, 2004.

[4] Lloyd N. Trefethen ve David Bau, III, *Numerical Linear Algebra*. SIAM, 1997.

[5] Chen K., *Matrix Preconditioning Techniques and Applications*. Cambridge University Press, 2005.