İkili Doğrusal Zamanla Değişen Dizgelerin Chebyshev Dizisi Yaklaşıklığı İle Çözümü

Nevra Bayhan, Osman Tonyalı
İstanbul Üniversitesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
34850, Avcılar, İstanbul
nevra@istanbul.edu.tr, tonyali@istanbul.edu.tr

Özet: *Bu çalışmada, doğrusal olmayan dizgelerin en kolayı olan ikili doğrusal zamanla değişen dizgelerin Chebyshev dizisi yaklaşıklığı ile çözümü önerilmiştir İkili doğrusal dizgelerin çözümü için gerekli olan tümlevleme işlemine, Chebyshev dizisinin çokterimlileri kullanılarak bulunan ileri tümlevleme işlem matrisi yardımıyla yaklaşıklık getirilecektir. Chebyshev dizisinin ileri tümlevleme işlem özelliği ile tümlevler içeren çözüm bağıntısı, sadece matrislerin çarpımından oluşan bir çözüm bağıntısı biçimine getirilir. Böylece özellikle zamanla değişen dizgeler için, katlı tümlev almadan ve durum geçiş matrisini (DGM) hesaplamadan yaklaşık çözüm elde edilecektir. Durum geçiş matrisi kullanılarak elde edilen analitik (gerçek) çözümle Chebyshev dizisi yaklaşıklığı ile bulunan çözüm karşılaştırılacaktır.*

1.Giriş

Bu çalışmada amaç, Chebyshev dizisi kullanarak devingen dizgelerin çözümünü, aritmetik anlamda tümlev almadan elde etmektir. Bu nedenle Chebyshev dizisinin ileri tümlevleme işlem ve çarpım işlem matrisleri geliştirilmiştir [1]-[2]-[3]. Chebyshev dizisinin sonlu sayıda çokterimlilerinin oluşturduğu Chebyshev temel sütun vektörünün [0,t) zaman aralığında tümlevi alınarak, ileri tümlevleme işlem matrisi (P_C) bulunurken Chebyshev temel sütun vektörüyle devriğinin (transpozunun) çarpımından ise çarpım işlem matrisi bulunur. P_C matrisi, kolayca hesaplama yapabilmek için kare matris olarak geliştirilmiştir ve boyutu da kullanılan Chebyshev çokterimli sayısına bağlıdır. İleri tümlevleme işlem ve çarpım işlem matrisleri yardımıyla ikili doğrusal zamanla değişen veya değişmeyen dizgelerin devinim bağıntıları, eş zamanlı doğrusal cebirsel bağıntılar biçimine getirilebilir. Bu yöntem, doğrusal dizgelere de uygulanabilir [2]-[3].

2. İkili Doğrusal Dizgenin Çözümü

İkili doğrusal zamanla değişen bir dizgenin durum denklemi

$$\dot{\underline{x}}(t) = A(t)\underline{x}(t) + B(t)\underline{u}(t) + \sum_{j=1}^{q} N_j(t)\underline{x}(t)u_j(t) \quad \text{ve} \quad \underline{x}(0)=\underline{x}_0 \tag{1}$$

biçiminde olsun [1]. Burada $\underline{x}(t)$ ve $\underline{u}(t)$, n-boyutlu durum ve q-boyutlu giriş (denetim) sütun vektörleridir. $A(t)$, $B(t)$ ve $N_j(t)$ matrisleri; öğeleri zamanın sürekli işlevleri olabilen sırasıyla nxn boyutlu durum, nxq boyutlu giriş (denetim) ve nxn boyutlu kat sayı matrisleridir. Burada bir takım aritmetik işlemlerle;

$$E(t) \mathrel{\hat{=}} A(t) + \sum_{j=1}^{q} N_j(t)u_j(t) \quad \text{tanımıyla} \quad \dot{\underline{x}}(t) = E(t)\underline{x}(t) + B(t)\underline{u}(t) \tag{2}$$

yazılabilir. Böylece $E(t)$ doğrusal bir dizgenin durum matrisi gibi düşünülebilir. Chebyshev çokterimlileri kullanılarak, bu denklemler takımının $\underline{x}(t)$ durum vektörü bulunabilir.

$0 \le t \le 1$ zaman aralığında Chebyshev çokterimlileri ve yinelemeli bağıntısı

$$\begin{aligned} T_0(t) &= 1 \\ T_1(t) &= 1-2t \\ T_2(t) &= 8t^2-8t+1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_{i+1}(t) &= (2-4t)T_i(t) - T_{i-1}(t) \end{aligned} \tag{3}$$

ile verilebilir. $0 \le t \le 1$ aralığında tümlevlenebilir işlev olan bir *x(t)* işlevinin Chebyshev dizisi açılımı,

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \; T_i(t) \cong \sum_{i=0}^{m-1} x_i \; T_i(t) = \underline{x}^T \underline{T}_{(m)}(t) \tag{4}$$

biçimindedir. $\underline{x}^T=[x_0, x_1,...,x_{m-1}]$ eşitliğine Chebyshev kat sayılar vektörü ve $\underline{T}_{(m)}^T=[T_0(t), T_1(t),..., T_{m-1}(t)]$ eşitliğine de Chebyshev temel sütun vektörü denilir. x_i Chebyshev kat sayıları aşağıdaki bağıntılarla bulunur.

$$x_0 = \frac{1}{\Pi}\int_0^1 (t-t^2)^{-\frac{1}{2}} x(t)T_0(t)dt \quad , \quad x_i = \frac{2}{\Pi}\int_0^1 (t-t^2)^{-\frac{1}{2}} x(t)T_i(t)dt \qquad i = 1,2,...,m-1 \tag{5}$$

Chebyshev çokterimlilerinin oluşturduğu Chebyshev temel sütun vektörünün her bir öğesinin [0,t) zaman aralığında tümlevlerinin alınarak bulunan terimlerin sabit katsayılarının matrisel biçimde düzenlenip yazılmasıyla ileri tümlevleme işlem matrisi (P_C) ve ileri tümlevleme işlem özelliği aşağıdaki gibi bulunur [2]-[3]

$$P_{C(mxm)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & ... & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & ... & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \frac{-1}{2(m-1)(m-3)} & 0 & 0 & ... & 0 & \frac{-1}{4(m-1)} \\ \frac{-1}{2m(m-2)} & 0 & 0 & ... & \frac{1}{4(m-2)} & 0 \end{bmatrix} , \quad \int_0^t T_i(\sigma)d\sigma = P_C \underline{T}_{(m)}(t) \tag{6}$$

İki Chebyshev çokterimlisinin çarpımını veren $T_i(t)T_j(t) = \frac{1}{2}\left[T_{i+j}(t) + T_{|i-j|}(t)\right]$ bağıntısından yararlanarak (*i,j*=0,1,...) $\underline{T}_{(m)}(t)$ temel sütun vektörü ile devriği çarpılıp birtakım ara işlemler yapıldıktan sonra çarpım işlem matrisi bulunur. $\underline{x}(t)$ durum vektörü için çarpım işlem matrisinin genel biçimi aşağıdaki gibidir [2].

$$\widetilde{X}_{(mxm)} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & ... & x_{m-1} \\ \frac{x_1}{2} & x_0 + \frac{1}{2}x_2 & 1/2(x_1 + x_3) & ... & \frac{x_{m-2}}{2} \\ \frac{x_2}{2} & 1/2(x_1 + x_3) & x_0 + \frac{1}{2}x_4 & ... & \frac{x_{m-3}}{2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1/2(x_{m-1}) & 1/2(x_{m-2}) & 1/2(x_{m-3}) & ... & x_0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

(2) ile verilen yeni durum denklemindeki $E(t)\underline{x}(t)$ ve benzer olarak $B(t)\underline{u}(t)$ çarpımlarının Chebyshev dizisel yaklaşıklıkları (5) ve (7)'den yararlanarak sırasıyla

$$\left.\begin{aligned} E(t)\underline{x}(t) &= \begin{bmatrix}\underline{E}_0 & \underline{E}_1 & ... & \underline{E}_{m-1}\end{bmatrix} \widetilde{X}_{(mxm)}\underline{T}_{(m)}(t) = \hat{E}\widetilde{X}_{(mxm)}\underline{T}_{(m)}(t) \\ B(t)\underline{u}(t) &= \begin{bmatrix}\underline{B}_0 & \underline{B}_1 & ... & \underline{B}_{m-1}\end{bmatrix} \widetilde{U}_{(mxm)}\underline{T}_{(m)}(t) = \hat{B}\widetilde{U}_{(mxm)}\underline{T}_{(m)}(t) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

olur. $\hat{E}$ ve $\hat{B}$ matrisleri, E(t) ve B(t) matrislerinin bütün öğelerinin (4) ve (5) bağıntılarından da yararlanarak Chebyshev dizisine açılımından ortaya çıkan sabit katsayıların oluşturduğu matrislerdir. (2)'nin [0, t) aralığında tümlevi alınıp (6)'da verilen bağıntılar yerleştirilince

$$\left[\underline{x}_0, \quad \underline{x}_1, \quad \ldots \quad, \underline{x}_{m-1}\right]\underline{T}_{(m)}(t) - \left[\underline{x}(0), \quad \underline{0}, \quad \ldots \quad, \underline{0}\right]\underline{T}_{(m)}(t) = \hat{E}\tilde{X}\int_0^t \underline{T}_{(m)}(\sigma)d\sigma + \hat{B}\tilde{U}\int_0^t \underline{T}_{(m)}(\sigma)d\sigma \quad (9)$$

elde edilir. Bu bağıntıda tümlevleri almamak için (6)'daki ileri tümlevleme işlem özelliği kullanılarak, ikili doğrusal zamanla değişen dizgelerin çözüm bağıntısı aşağıdaki gibi bulunur.

$$\left[\underline{x}_0, \quad \underline{x}_1, \quad \ldots \quad, \underline{x}_{m-1}\right] - \left[\underline{x}(0), \quad \underline{0}, \quad \ldots \quad, \underline{0}\right] = \hat{E}\tilde{X}P_{C(mxm)} + \hat{B}\tilde{U}P_{C(mxm)} \quad (10)$$

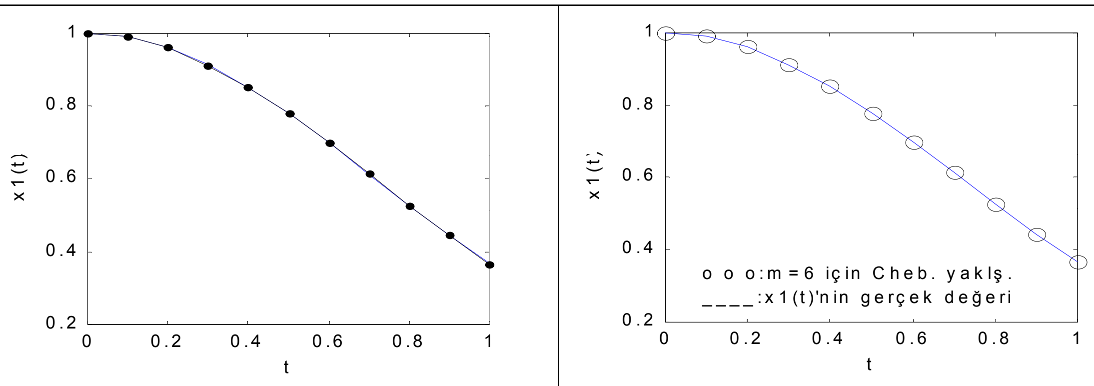
3. Örnek

$N_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A(t)$=[0], $B(t)$=[0], $u(t) = t$ ve $\underline{x}(0) = \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ verileri

(1)'de yerleştirilirse $\dot{\underline{x}}(t) = N_1\underline{x}(t)u_1(t)$ zamanla değişmeyen ikili doğrusal bir denklem bulunur. Bu dizgenin çeşitli sayıda Chebyshev çokterimlisi (farklı m değerleri) için bulunan $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ yaklaşık çözümleri ve DGM hesaplanarak bulunan analitik çözümü Çizelge-1'de verilmiş ve çözümler Şekil 1 ve 2'de karşılaştırılmıştır.

Çizelge-1. Dizgenin analitik (gerçek) ve Chebyshev yaklaşıklık çözümleri

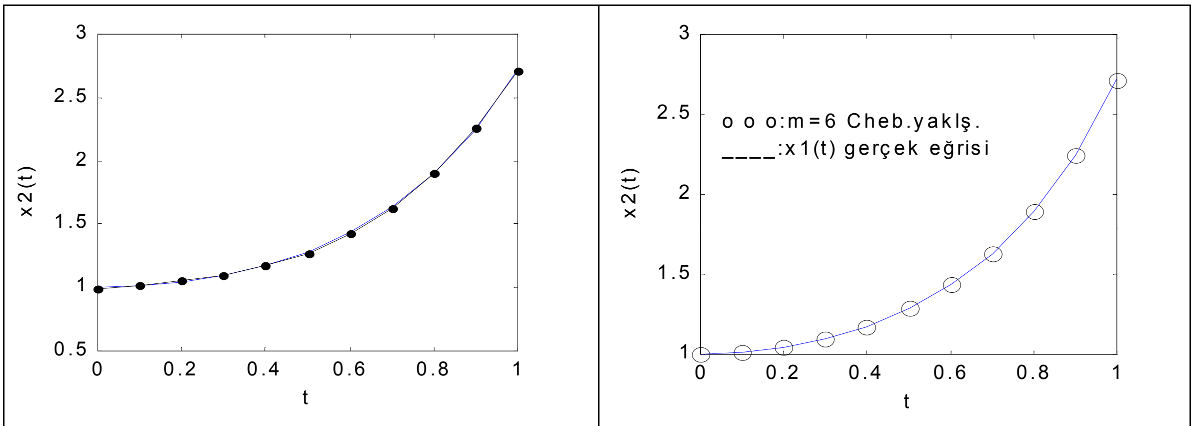
Analitik Çözüm	$x_1(t) = \exp(-t^2)$ $\qquad x_2(t) = \exp(+t^2)$
m=4 terimi için Chebyshev yaklaşıklığı	$x_1(t) \cong 0.9996 + 0.0218t - 1.2029t^2 + 0.5485t^3$ $x_2(t) \cong 0.9873 + 0.3774t - 0.5707t^2 + 1.9147t^3$
m=6 terimi için Chebyshev yaklaşıklığı	$x_1(t) \cong 1 + (6.2271e-004)t - 1.0018t^2 - 0.0215t^3 + 0.6219t^4 - 0.2314t^5$ $x_2(t) \cong 0.9997 + 0.0237t + 0.7481t^2 + 0.9579t^3 - 1.0736t^4 + 1.0622t^5$



$x_1(t)$'nin m=4 için Chebyshev yaklaşıklığı ile analitik çözümün karşılaştırılması
[Karesel Yanılgı (ε)= 8.161x 10^{-5}]

$x_1(t)$'nin m=6 için Chebyshev yaklaşıklığı ile analitik çözümün karşılaştırılması
[Karesel Yanılgı (ε)= 7.324x 10^{-5}]

Şekil-1. $x_1(t)$'nin Cheb. dizisinin ilk 4 ve 6 tane çokterimlisi kullanılarak bulunan yaklaşık çözümleri ile analitik çözümünün karşılaştırılması (*Düz çizgi: Analitik çözüm, Noktalı: Cheby. yaklaşıklık çözüm eğrileri*)



$x_2(t)$'nin m=4 için Chebyshev yaklaşıklığı ile analitik çözümün karşılaştırılması
[Karesel Yanılgı (ε)= 1.1387x 10^{-3}]

$x_2(t)$'nin m=6 için Chebyshev yaklaşıklığı ile analitik çözümün karşılaştırılması
[Karesel Yanılgı (ε)= 1.11919x 10^{-3}]

Şekil-2. $x_2(t)$'nin Cheb. dizisinin ilk 4 ve 6 tane çokterimlisi kullanılarak bulunan yaklaşık çözümleri ile analitik çözümünün karşılaştırılması (*Düz çizgi: Analitik çözüm, Noktalı: Cheby. yaklaşıklık çözüm eğrileri*)

4. Sonuç

Chebyshev dizisi sürekli zamanlı ve aynı zamanda dik işlevler (ortagonal) sınıfındandır. Elde edilen sonuçlar; Chebyshev dizisiyle bulunan çözümlerin, analitik çözüme oldukça yakın olduğunu göstermiştir. Kullanılan çokterimli sayısı arttıkça (m değeri büyüdükçe) analitik çözümle yaklaşık çözümler arasındaki yanılgının gittikçe küçüldüğü, Şekil-1 ve 2'den görülmektedir. Altıdan daha fazla Chebyshev çokterimlisi kullanılırsa yanılgı daha da küçülür. Benzer yöntem Taylor ve Walsh dizileri ile de denenmiştir ve analitik çözüme en yakın çözümün Chebyshev dizisi ile sağlandığı görülmüştür [3]. Analitik çözüme yaklaşıklık bakımından Taylor, Chebyshev ve Walsh dizileri karşılaştırıldığı zaman iyi bir yaklaşıklık elde etmek için Chebyshev dizisi, Taylor dizisindeki kadar çok sayıda terim kullanmayı gerektirmemektedir [3]-[4]. Walsh dizisi ise, ayrık zamanlı bir dizi olduğu için, geliştirilen yöntem Chebyshev dizisininkine göre daha karmaşıktır [3]-[5].

Zamanla değişen dizgelerin durum geçiş matrislerini hesaplamak, genelde çok zordur. Bu yöntemin avantajı, aritmetik anlamda katlı tümlev almadan ve durum geçiş matrisini hesaplamadan dizgenin çözümünün daha kolay olarak hesaplanabilmesidir.

Burada önerilen yöntemin dizge tasarımlarında, dizgelerin parametrelerinin kestiriminde, denetleyici-gözlemleyici dizgelerin tasarımında da yararlanılır [1]-[3]-[6]. Ayrıca ayrık zamanlı, dağılmış parametreli, gecikmeli dizgelerin çözümlerinin bulunmasında ve ses tanısında bu yöntemden yararlanılabilir [3].

5. Kaynaklar

[1]. Liu C. C. ve Shih Y. P., "Parameter estimation of bilinear systems via Chebyshev polynomials", Journal of the Franklin Institute, 317(6), s.373-382, 1984.

[2]. LIU C. C. ve SHIH Y. P., "Analysis and optimal control of time-varying systems via Chebyshev polynomials" , Int. Journal Control., 38(5), s.1003-1012, 1983

[3]. Bayhan N., Zaman Bölgesinde Dizge Parametrelerinin Belirlenmesi İçin Farklı Bir Yöntem. Yüksek Lisans tezi, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2001.

[4]. Wang W. P., "New approach to analysis and optimal control of time-varying systems via Taylor Series", Int. Journal. Syst. Sci., 21(9), s.1831-1839, 1990.

[5]. Lewis F. L., Mertzios V. G., Vachtsevanos G., Christodoulou M. A., "Analysis of bilinear systems using Walsh functions", IEEE Trans.on Automatic Control, 35(1), s. 119-123, 1990.

[6]. Tonyalı O. ve Aksoy, S., "A state controllability technique using Taylor series approximation for linear time-varying systems", Int.Cong. on Computational Methods in Engineering., Shiraz Proceedings ICCM., 4 s.159-165, 1993.