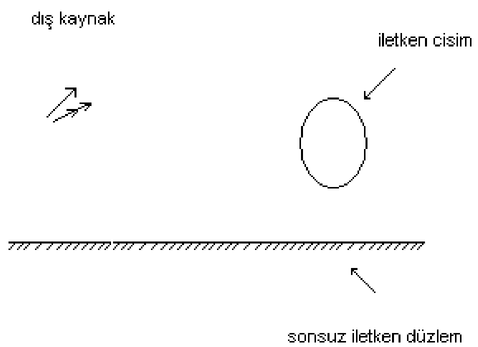
Sonsuz İletken Düzlem Ortamında Elektromanyetik Momentler Metodu

C. Cengiz Yıldırım ve Levent Gürel
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Bilkent Üniversitesi
Ankara
lgurel@bilkent.edu.tr

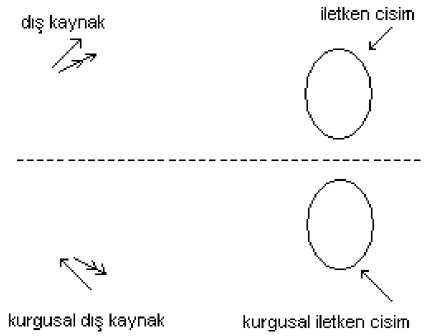
Özet: *Momentler metodu gelişigüzel geometrilerin elektromanyetik saçınım problemlerini çözmek için kullanılan sayısal bir metottur. İletken düzlemler, aslında dalgalı olan toprak veya deniz yüzeylerini yaklaşık olarak modellemek için kullanılabilir. Elektromanyetik problem, sonsuz iletken düzlemle modellenmesi sonrasında, imaj teorisi (image theory) kullanılarak çözülebilmektedir. Bu çalışmada öncelikle imaj teorisinden faydalanılarak serbest uzay Green fonksiyonu değiştirilmiş ve momentler metodu ile problem sayısal olarak çözülmüştür. Problemde düzlem dalgalar ve voltaj beslemesi olmak üzere iki tip kaynak kullanılmıştır. Bu bildiride, sonsuz iletken düzlem üzerinde bulunan değişik geometrilerin elektromanyetik saçınım formulasyonları detaylandırılacak ve bazı hedeflerin radar ara kesit hesaplamaları anlatılacaktır.*

1. Giriş

Sonsuz iletken düzlem üzerinde bulunan iletken kaplı bir cismin elektromanyetik saçınım problemi elektrik alan integral denklemi ve imaj teorisi kullanılarak çözülebilmektedir. Çözülmesi gereken problem Şekil 1'de sembolik olarak gösterilmiştir. Öncelikle imaj teorisi [1] kullanılarak, problemin bir eşdeğer problemi meydana getirilir. Eşdeğer problem, belirli bir bölgede gerçek problemle aynı sonucu veren ve gerçek probleme ait sınır koşullarına uyan problem anlamına gelmektedir.



Şekil 1. Problemin sembolik gösterimi.



Şekil 2. Eşdeğer problem.

2. Formülasyon

Şekil 2, Şekil 1'de gösterilen problemin eş değer problemidir ve sonsuz iletken düzlem üzerinde bulunan yarı uzay için her iki problemin sonuçları birbirlerine eşit olacaktır. Elektrik alan sınır koşullarına göre, iletken kaplı cismin yüzeyinde yüzeye paralel toplam elektrik alan

$$\overline{E}^{top}_{paralel} = \overline{E}^{saç}_{paralel} + \overline{E}^{gelen}_{paralel} = 0 \tag{1}$$

veya

$$\overline{E}^{saç}_{paralel} = - \overline{E}^{gelen}_{paralel} \tag{2}$$

olmaktadır. Saçınan elektrik alan, aydınlatılan cisim üzerinde indüklenen akımlar cinsinden

$$\overline{E}^{saç} = iw\mu\left[\overline{\overline{I}} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right] \cdot \int_{s'} ds' \; g(\overline{r},\overline{r}') \; \overline{J}(\overline{r}') \tag{3}$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. Denklem (3)'ü Denklem (2) içine yerleştirirsek

$$-\overline{E}^{gelen}_{paralel} = \hat{t} \cdot iw\mu\left[\overline{\overline{I}} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right] \cdot \int_{s'} ds' \; g(\overline{r},\overline{r}') \; \overline{J}(\overline{r}') \tag{4}$$

eşitliği elde edilir.

Momentler metodunu probleme uygulayabilmek için cismin yüzeyinde indüklenen akımı temel fonksiyonlar kullanarak modellemek gerekmektedir. Bu şekilde cismin yüzeyinde kesintisiz olarak akan akım, ayrık dipol akımlar cinsinden yaklaşık olarak ifade edilir. Her bir ayrık akım elemanının katsayısını bulmak maksadıyla, ikinci bir temel fonksiyonla, tüm ayrık akım elemanlarının testi yapılır. İndüklenen akım,

$$\overline{J}(\overline{r}') = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \overline{b}_j(\overline{r}') \tag{5}$$

olarak yazılır. Bu tanımlama ile Denklem (4) yeniden yazılabilir.

$$-\overline{E}^{gelen}_{paralel} = \hat{t} \cdot iw\mu\left[\overline{\overline{I}} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right] \cdot \int_{s'} ds' \; g(\overline{r},\overline{r}') \; \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \overline{b}_j(\overline{r}') \tag{6}$$

Ayrık akımları sembolize eden her bir temel fonksiyonun katsayılarını bulmak için Denklem (6) eşitliğinin her iki tarafı, ***t_i(r)*** test fonksiyonu ile çarpılarak, test fonksiyonunun tanımlı olduğu yüzeyde integre edilir ;

$$-\int ds \overline{E}^{gelen}_{paralel} \cdot \overline{t}_i(\overline{r}) = \int ds \; \overline{t}_i(\overline{r}) \cdot iw\mu\left[\overline{\overline{I}} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right] \cdot \int_{s'} ds' \; g(\overline{r},\overline{r}') \; \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \overline{b}_j(\overline{r}') \tag{7}$$

Test fonksiyonlarının, indüklenen akımı temsil eden temel fonksiyonlarla integrasyonları sonucu NxN boyutlarında bir matris elde edilir ve bu matrisin her bir elemanı Denklem (8)'de tanımladığı (**Z_{ij}**) gibi hesaplanır.

$$-\int ds \overline{E}^{gelen}_{paralel} \cdot \overline{t}_i(\overline{r}) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \underbrace{\int ds \; \overline{t}_i(\overline{r}) \cdot iw\mu\left[\overline{\overline{I}} + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right] \cdot \int_{s'} ds' \; g(\overline{r},\overline{r}') \; \overline{b}_j(\overline{r}')}_{Z_{ij}} \tag{8}$$

Sonuç olarak problem,

$$\overline{\overline{Z}} \cdot \overline{I} = \overline{V} \tag{9}$$

şeklinde matris denklemine dönüştürülür ve çözümü ile α_j olarak gösterilen temel fonksiyona ait katsayılar bulunur.

3. Green Fonksiyonunun İmaj Teorisi Kullanılarak Değiştirilmesi

Şekil 2'de tanımlanan problem daha küçük boyutlu bir matris denklemi oluşturularak da çözülebilir. Böylece bellek kullanımını ve çözüm zamanını azaltmak mümkün olabilir. İmaj teorisine göre kurgusal ve gerçek yükler birbirlerinin ters işaretlisine eşittirler. Bu özellikten faydalanarak serbest uzay Green fonksiyonu değiştirilebilir ve Denklem (8)'in iç integrali,

$$\int ds' \left\{ (\hat{x} b_{jx} + \hat{y} b_{jy}) \left(g_{gerçek}(\overline{r}, \overline{r}') - g_{kurgusal}(\overline{r}, \overline{r}') \right) + \hat{z} b_{jz} \left(g_{gerçek}(\overline{r}, \overline{r}') + g_{kurgusal}(\overline{r}, \overline{r}') \right) \right\} \quad (10)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (10)'daki Green foksiyonları kartezyen koordinat sisteminde

$$g_{gerçek}(\overline{r}, \overline{r}') = \frac{e^{ik\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}}{4\pi\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \quad (11)$$

$$g_{kurgusal}(\overline{r}, \overline{r}') = \frac{e^{ik\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}}{4\pi\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}} \quad (12)$$

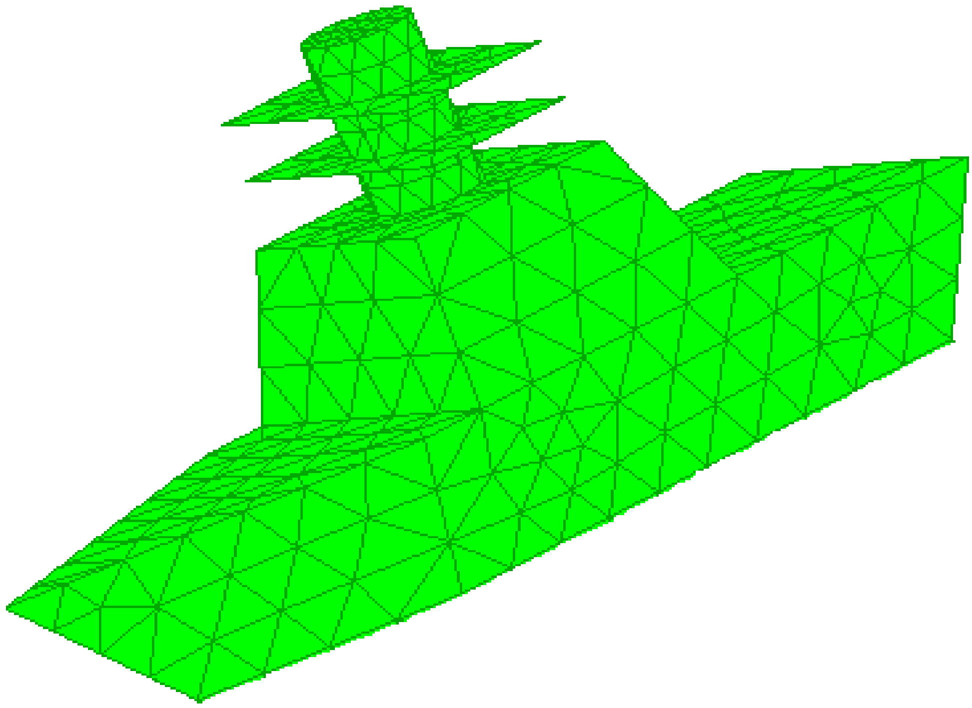
şeklinde ifade edilebilir. Bu yaklaşım sonucu yapılan sayısal çözümdeki bilinmeyen sayısı, önceki çözümün bilinmeyen sayısının yarısına eşit olmaktadır. Bu çözümde sonsuz iletkenin x-y düzleminde (z=0) olduğu varsayılmıştır.

4. Örnek Çözüm

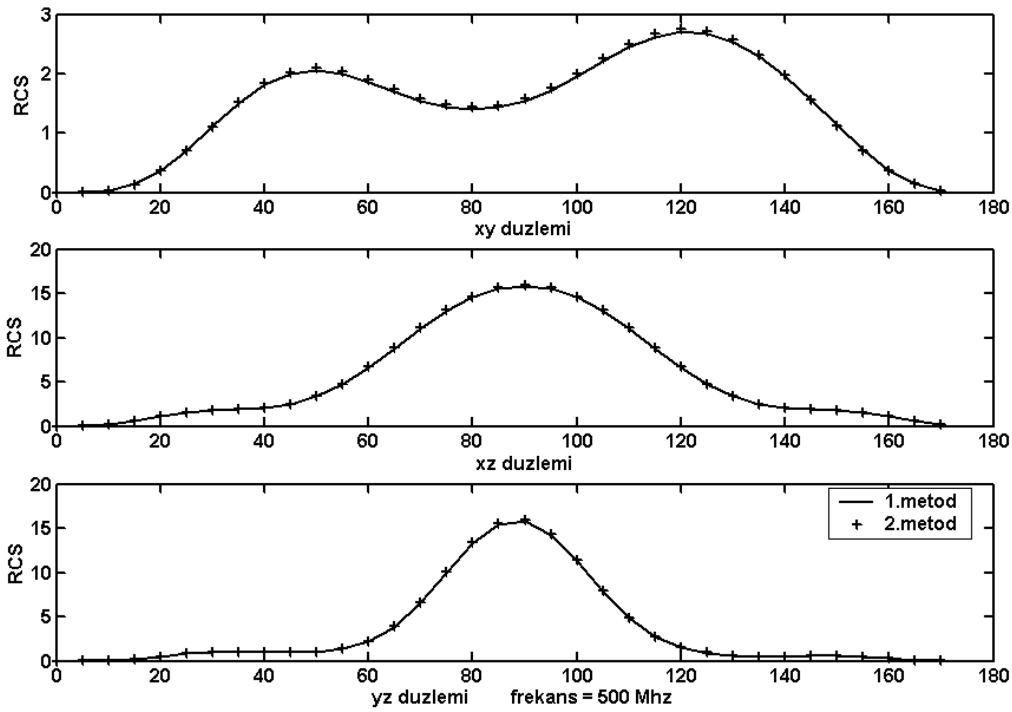
Şekil 3'te gösterilen gemi modeli sonsuz iletken düzleme değdiği kabul edilerek, anlatılan yöntemlerle çözülmüştür. Şekil 4'te ise yapılan çözümlerden elde edilen radar ara kesit değerleri üç ana düzlem (x-y, x-z ve y-z düzlemleri) üzerinde gösterilmiştir. Çözümlerde kullanılan temel fonksiyonlar üçgen yüzeyler üzerinde ifade edildiği için gemi modelinin yüzeyi Şekil 3'teki gibi üçgenlere bölünmelidir. Gemi modelinin direk kısmına dikkat edildiğinde, bazı ortak kenarlarda 3 üçgenin bağlı olduğu gözlemlenir. Bu tip kenarlarda indüklenen akımı temsil eden temel fonksiyonlar 3 farklı şekilde ifade edilebilir, fakat çözüm için, bu akımlardan herhangi ikisi kullanılmalıdır.

4. Kaynaklar

[1]. E. Arvas, R.F. Harrington ve J.R. Mautz, 'Radiation and Scattering from Electrically Small Conducting Bodies of Arbitrary Shape Above an Infinite Ground Plane' IEEE Trans. Antennas Propagat.,vol. AP-35, sayfa 378-383, Nisan 1987.



Şekil 3. Gemi modelinin üçgenlenmiş geometrisi.



Şekil 4. Gemi modelinin üç ana düzlem üstündeki radar ara kesit değerleri.