Empedans Yüklü Paralel Levhalı Dalga Kılavuzundan Düzlemsel Dalgaların Kırınımı

Sebahattin Eker, İ.Hakkı Tayyar

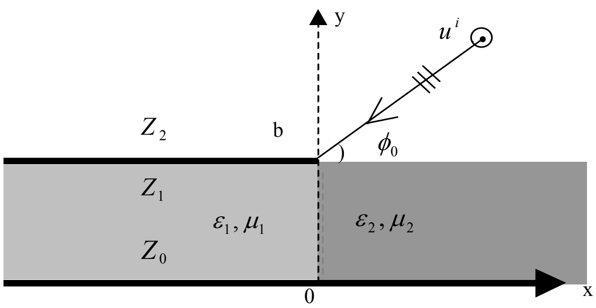
Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü
Elektronik Mühendisliği Bölümü
Gebze, Kocaeli

eker@gyte.edu.tr , tayyar@gyte.edu.tr

Özet: *Düzlemsel akustik veya elektromanyetik dalgaların paralel yarım düzlem sistemlerinden kırınımı veya paralel levhalı yarı sonsuz dalga kılavuzlarından ışınımı gerek kuramsal gerekse mühendislik uygulamaları bakımından son derece büyük önem taşımaktadır. Sonsuz geniş bir empedans düzlemi ile buna paralel olarak yerleştirilmiş, alt ve üst yüzeyleri farklı empedans özelliği gösteren bir yarım düzlemden oluşmuş paralel levhalı dalga kılavuzundan elektromagnetik dalgaların ışınımı, empedans ile yüklenmiş horn anten ve yüzey dalga fırlatıcısı (surface wave launcher) için bir kanonik problem olduğundan anten kuramı için büyük önem taşımaktadır.*

1. Giriş

Bu problem ilk olarak Rulf ve Hurd [1] tarafından ele alınmış ve yarım düzlemin üst ve alt yüzeylerinin empedanslarının $Z_1 + Z_2 = 0$ koşulunu sağladıkları özel hal için bir skaler Wiener-Hopf denklemine indirgenerek çözülebilmiştir. Aynı problem daha sonra Büyükaksoy ve Birbir [2] tarafından tekrar ele alınmış ve $Z_1 + Z_2 \neq 0$ genel hali için yukarıda belirtilen karma yöntemle çözülmüştür.Bu çalışmada ise, [2] deki geometri, $0 < y < b,\ x < 0$ ve $0 < y < b,\ x > 0$ bölgelerinin şekil 1.'deki gibi farklı özelliklere sahip dielektrik malzemelerle dolu olması halinde tekrar ele alınmış ve bu kez düzlemsel elektromanyetik dalgaların kırınımını incelenmiş ve analizi yapılmıştır.



Şekil 1. Problemin geometrisi

2. Problemin Formülasyonu ve Çözümü

E_z –polarize bir düzlemsel dalganın $S_1 = \{x \in (-\infty, \infty),\ y = 0,\ z \in (-\infty, \infty)\}$ empedans düzlemi ile buna paralel olarak yerleştirilmiş $S_2 = \{x \in (-\infty, 0),\ y = b,\ z \in (-\infty, \infty)\}$ empedans yarım düzleminin oluşturduğu paralel levhalı dalga kılavuzundan kırınımı incelenecektir. S_1 in yüzey empedansı Z_0, S_2 yarım düzleminin alt ve üst yüzeylerindeki empedanslar da sırasıyla Z_1 ve Z_2 dir. Boşluğun karakteristik empedansına göre bağıl yüzey empedansları

$$Z_j = \eta_j \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \qquad j = 0,1,2 \tag{1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada ε_0 ve μ_0 boşluğun dielektrik geçirgenliği ve magnetik permeabilitesidir. η_0, $x \in (-\infty, \infty)$, $y = 0$ düzleminin, η_1 ve η_2 de sırasıyla S_2 düzleminin alt ve üst yüzeylerinin dış ortama göre bağıl yüzey empedansıdır.

Yapılacak analiz bakımından toplam elektrik alan $u^T(x,y)$ nin aşağıdaki gibi ifade etmek uygun olacaktır.

$$u^T(x,y) = \begin{cases} u^i + u^r + u_1 & , \quad y > b \\ u_2^{(1)} H(-x) + u_2^{(2)} H(x) & , \quad 0<y<b \end{cases} \tag{2}$$

Burada $H(x)$, Heaviside birim basamak fonksiyonunu, $u^i(x,y)$, şeklindeki gelen alanı, $u^r(x,y)$ ise $y = b$ de bulunan S_2 empedans düzleminden yansıyan alanı göstermektedir.

$$E_z^i(x,y) = u^i(x,y) = e^{-ik(x\cos\phi_0 + y\sin\phi_0)} \tag{3}$$

$$u^r(x,y) = \frac{\eta_2 \sin\phi_0 - 1}{\eta_2 \sin\phi_0 + 1} e^{-ik[x\cos\phi_0 - (y-2b)\sin\phi_0]} \tag{4}$$

ϕ_0 geliş açısı,. k ise ortamın dalga sayısıdır. Problemi çözerken göz önüne alacağımız Fourier integrallerinin yakınsaması için ortamın çok küçükte olsa bir iletkenliğinin olduğunu, buna bağlı olarak da k 'nın dalga sayısının çok küçük bir sanal bileşene sahip olduğu varsayılacaktır. Kayıpsız ortam için geçerli çözüm analizin sonunda $\mathrm{Im}(k) \to 0$ yapmak suretiyle elde edilebilir.

Helmholtz denklemini sağlayan $u^T(x,y)$ toplam alanı aşağıdaki sınır ve süreklilik koşullarını sağlayacak şekilde belirlenecektir.

$$\left(1 + \frac{\eta_2}{ik}\frac{\partial}{\partial y}\right) u_1(x,b) = 0 \qquad , x < 0 \tag{5a}$$

$$\left(1 - \frac{\eta_1}{ik_1}\frac{\partial}{\partial y}\right) u_2^{(1)}(x,b) = 0 \quad , x < 0 \tag{5b}$$

$$\left(1 + \frac{\eta_0}{ik_1}\frac{\partial}{\partial y}\right) u_2^{(1)}(x,0) = 0 \quad , x < 0 \tag{5c}$$

$$\left(1 + \frac{\eta_0}{ik_2}\frac{\partial}{\partial y}\right) u_2^{(2)}(x,0) = 0 \quad , x > 0 \tag{5d}$$

$$u_1(x,b) + u^i(x,b) + u^r(x,b) - u_2^{(2)}(x,b) = 0 \qquad , x > 0 \tag{5e}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u_1(x,b)+\frac{\partial}{\partial y}u^i(x,b)+\frac{\partial}{\partial y}u^r(x,b)-\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial}{\partial y}u_2^{(2)}(x,b)=0 \quad , x>0 \tag{5f}$$

$$\mu_r=\frac{\mu_2}{\mu_0} \tag{5g}$$

$$u_2^{(1)}(0,y)=u_2^{(2)}(0,y) \quad , \ 0<y<b \tag{5h}$$

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial}{\partial x}u_2^{(1)}(0,y)=\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial}{\partial x}u_2^{(2)}(0,y) \quad , \ 0<y<b \tag{5i}$$

Bundan sonraki analiz sınır ve süreklilik koşullarının Fourier dönüşümü alınmış alan bileşenlerine uygulanması ve ikinci türden modifiye Wiener-Hopf probleminin elde edilmesidir.

$$\begin{aligned}\frac{k}{\mu_r\eta_0}\frac{\chi(\alpha,\eta_2)N(\alpha)}{M(\alpha)}R_+(\alpha)-\dot{F}(\alpha,b)=&-\frac{2k\sin\phi_0 e^{-ikb\sin\phi_0}}{(\eta_2\sin\phi_0+1)(\alpha-k\cos\phi_0)}\\ &+\frac{1}{\mu_r}\int_0^b\frac{\left[\cos K_2t+\frac{k_2}{i\eta_0}\frac{\sin K_2t}{K_2}\right]}{M(\alpha)}\left[f(t)-i\alpha g(t)\right]dt\end{aligned} \tag{6}$$

$$R_+(\alpha)=\left[1+\frac{\eta_2K(\alpha)}{k}\right]A(\alpha) \tag{7a}$$

$$M(\alpha)=\left(1-\frac{k_2\eta_2}{\mu_rk\eta_0}\right)\cos K_2b-\left(\frac{ik_2}{\eta_0}+\frac{\eta_2K_2^{\ 2}}{\mu_rik}\right)\frac{\sin K_2b}{K_2} \tag{7b}$$

$$N(\alpha)=i\chi_1\cos K_2b+\mu_r\chi_2\sin K_2b \tag{7c}$$

$$\chi(\alpha,\eta_2)=\frac{1}{\eta_2+\dfrac{k}{K(\alpha)}} \tag{7d}$$

(6) denkleminde (+) alt indisi ile üst yarı düzlemde regüler fonksiyonlar ifade edilmiştir. (7a) denkleminde görülen $A(\alpha)$ ise (4a) denkleminin genel çözümündeki bilinmeyen katsayıdır. Wiener-Hopf tekniğinin uygulanması sonucu (6) denklemi çözülür. Çözüm aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}R_+(\alpha)=&\frac{2\mu_r\eta_0\sin\phi_0}{(\eta_2\sin\phi_0+1)}\frac{M_+(\alpha)}{\chi_+(\alpha)N_+(\alpha)}\frac{M_-(k\cos\phi_0)}{\chi_-(k\cos\phi_0)N_-(k\cos\phi_0)(k\cos\phi_0-\alpha)}\\ &-\frac{\eta_0}{2k}\frac{M_+(\alpha)}{\chi_+(\alpha)N_+(\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}(f_m+i\alpha_mg_m)\frac{\left(K_{2m}\sin K_{2m}b-\frac{k}{i\eta_0}\cos K_{2m}b\right)M_+(\alpha_m)}{\alpha_m(\alpha+\alpha_m)\chi_+(\alpha_m)N_+(\alpha_m)}\end{aligned} \tag{8}$$

(8) denkleminde görülen $M_{\pm}(\alpha), N_{\pm}(\alpha)$ ve $\chi_{\pm}(\eta,\alpha)$ fonksiyonları (7b,c,d) fonksiyonlarının Wiener-Hopf anlamında faktorizasyonlarıdır.

$$M(\alpha) = M_{+}(\alpha)M_{-}(\alpha) \quad ; \quad M_{-}(\alpha) = M_{+}(-\alpha) \tag{9a}$$

$$N(\alpha) = N_{+}(\alpha)N_{-}(\alpha) \quad ; \quad N_{-}(\alpha) = N_{+}(-\alpha) \quad \text{9b)}$$

$$\chi(\eta,\alpha) = \chi_{+}(\eta,\alpha)\chi_{-}(\eta,\alpha) \quad ; \quad \chi_{-}(\eta,\alpha) = \chi_{+}(\eta,-\alpha) \quad \text{9c)}$$

(8) denkleminde gözüken α_m değerleri ise aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$M(\pm\alpha_m) = 0 \quad , \quad \Im m(\alpha_m) > \Im m(k_1) \;\; , \;\; m = 1,2... \tag{10}$$

(9a-c) denklemlerinde $M_{+}(\alpha),\ N_{+}(\alpha),\ \chi_{+}(\eta,\alpha),\ M_{-}(\alpha),\ N_{-}(\alpha),\ \chi_{-}(\eta,\alpha)$ fonksiyonları kompleks $a-$ düzleminin sırasıyla üst yarısında ve alt yarısında sıfırları olmayan ve regüler olan fonksiyonlardır.

3. Saçılan Alanın Analizi

Saçılan alan $u_1(x,y)$ aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$u_1(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R_{+}(\alpha)e^{iK(\alpha)(y-b)}}{\dfrac{\eta_2 K(\alpha)}{k}+1} e^{-i\alpha x} d\alpha \tag{11}$$

(11) denkleminde $\alpha = -k\cos t$, $x = \rho\cos\phi$, $y-b = \rho\sin\phi$, $y > b$ dönüşümleri yapılırsa denklem semer noktası yöntemiyle asimptotik olsrsk hesaplanabilir. Semer noktası $y > b$ bölgesi için $t = \phi$ noktalarıdır ve alan ifadesi:

$$u_1(\rho,\phi) \sim \sqrt{2\pi}e^{-i\pi/4}\frac{R_{+}(-k\cos\phi)k\sin\phi}{1+\eta_2\sin\phi}\frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \tag{12}$$

olarak elde edilir.

Referanslar

[1] RULF, B., HURD, R.A., Radiation from an open waveguide with reactive walls, IEEE Trans. Antennas and Propagat., Vol. AP-26, No.5, 1978.
[2] BÜYÜKAKSOY, A., BİRBİR, F., Analysis of an impedance loaded parallel-plate waveguide radiator, Journal of Electromagnetic Waves and Application, Vol.12, 1509-1526, 1998.