YARI BOŞ UZAYDA SKALER DALGALARIN SONSUZ İNCE YUMUŞAK BİR HALKADAN SAÇILMASI

Fatih Dikmen
dikmen@gyte.edu.tr
Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, PK. 141, 41400 Gebze - Kocaeli.
Tel:+902626538499, faks:+902626538490

Özet: *Skaler dalgaların yarı boş uzayda sonsuz ince bir halkadan saçılmasına ilişkin sınır değer problemini matematiksel olarak güçlü ve sayısal olarak verimli olarak ele alan bir yöntem önerilmektedir. Çözüm Ortogonal Polinomlar ve Analitik Regülerleştirme Yöntemleri'ne dayanmaktadir. Problem, boş uzaydaki halkadan skaler dalgalarin saçılması probleminin yarı boş uzaya genişletilmişidir. Önerilen Regülerleştirme sonucunda başlangıç sınır değer problemi karesi toplanabilir dizilerin uzayı l_2'de ikinci türden $(I+H)x=b$, x, $b\in l_2$ biçimindeki lineer cebir denklemlerine indirgenmiştir. Bu türden bir denklem prensipte keyfi yaklaşıklıkta sayısal kesme kullanılarak çözülebilir.*

1.Giriş

Çalışmanın amacı, k={k_0, z>d; k_1, z<d}bünyesine sahip uzayda, yumuşak (Dirichlet sınır koşullu) ve S={(z,r,φ): $z = z_0 \neq$d, $r\in[a,b]$, $\varphi\in[-\pi,\pi]$ } biçiminde ifade edilebilecek bir yüzeyden (şekil 1a, şekil 1b) skaler dalgalarin kırınımına ilişkin sınır değer problemini matematiksel olarak güçlü ve sayısal olarak kararlı bir çözüme ulaştırabilmektir.

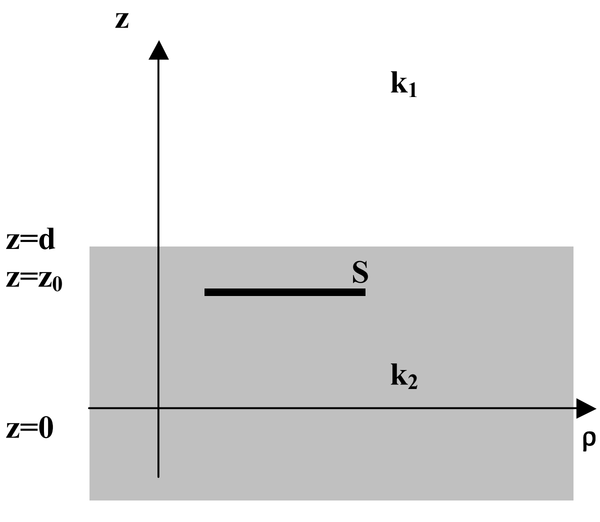
Bilindiği gibi, sözkonusu problem,

$$\int_S J_D(p) G(q,p)\, ds_p = -u^i(q)\ ; \qquad q\in S \tag{1}$$

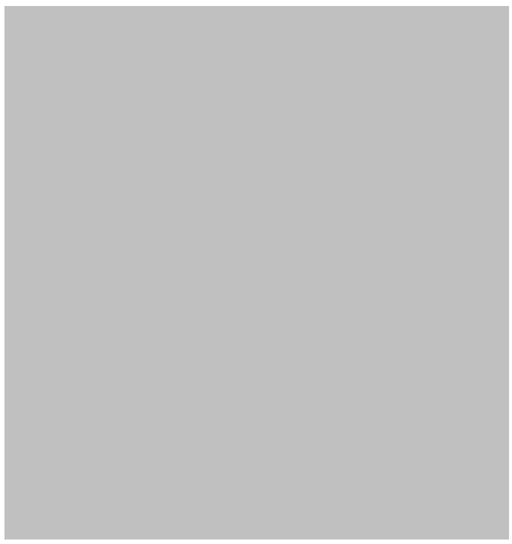
biçiminde 1. türden bir integral denkleme indirgenebilir. Burada $u^i(q)$ bilinen gelen dalga, $J_D(p)$,

$$J_D(p)=[d(p)]^{-1/2}H(p) \tag{2}$$

biçiminde ayrıt koşulunu sağlayan bilinmeyen fonksiyondur. $H(p)$, S üzerinde düzgün bir fonksiyon, $d(p)$ ise halkanin ayrıtına en yakın mesafedir. $G(q,p)$ fonksiyonu z<d ve z>d da bünyesi farklı uzayın Green fonksiyonudur.



Şekil 1a



Şekil 1b

2. Yarı Boş Uzayın Green Fonksiyonu

z=d düzlemi ile ikiye ayrılmış üç boyutlu uzayda z=d deki sınır koşullarını ve Sommerfeld radyasyon koşulunu sağlayan Green Fonksiyonu aşağıdaki gösterilebilir:

$$G(q,p) = -\frac{1}{4\pi}\begin{cases} \dfrac{e^{ik_1 R(q,p)}}{R(q,p)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_n^r(q,p) e^{in\varphi}, & z > d \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_n^t(q,p) e^{in\varphi}, & z < d \end{cases} \tag{3}$$

(3) q gözlem noktası z=d düzleminin üstündeki bölgede olduğunda geçerlidir.

Π_n^r ve Π_n^t için ifadeler, Sommerfeld integralleri aracılığı ile elde edilip sınır koşulları uygulanarak bulunabilir [9].

$$\Pi_n^r(q,p) = i^{(-n)} \int_0^\infty \frac{k_2^2\sqrt{\lambda^2-k_1^2} - k_1^2\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}{k_2^2\sqrt{\lambda^2-k_1^2} + k_1^2\sqrt{\lambda^2-k_2^2}} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_1^2}} J_n(\lambda\rho(q,p)) exp\left\{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\, z_A(q,p)\right\} d\lambda \tag{4a}$$

$$\Pi_n^t(q,p) = i^{(-n)} \int_0^\infty \frac{2k_1^2\sqrt{\lambda^2-k_2^2}}{k_2^2\sqrt{\lambda^2-k_1^2} + k_1^2\sqrt{\lambda^2-k_2^2}} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k_1^2}} J_n(\lambda\rho(q,p)) exp\left\{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}\, z_C(q) + \sqrt{\lambda^2-k_2^2}\, z_C(p)\right\} d\lambda \tag{4b}$$

Burada $J_n(\lambda\rho)$ n'inci mertebeden 1. tür Bessel fonksiyonu, q, p sırayla gözlem ve integrasyon noktalarıdır. Yukarıdaki integralleri hesaplamada izlenecek yol için önce aşağıdaki fonksiyonun Fourier serisine açılımını ele alalım:

$$\frac{e^{ikR(q,p)}}{R(q,p)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\varphi} \tag{4c}$$

Fourier katsayısı F_n aşağıdaki ifadeye denk olacaktır [9]:

$$F_n = i^{(-n)} \int_0^\infty J_n(\lambda\rho(q,p)) exp\left\{-\sqrt{\lambda^2-k^2}\, z\ (q,p)\right\} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\, d\lambda \tag{4d}$$

Sağ yandaki integrand $\lambda\to\infty$ için mutlak yakınsak değildir ancak sol yanda yer alan Fourier katsayısı verimli algoritmalar sayesinde hesaplanabilir. Bu özellik (4a) ve (4b) denklemlerinde, ki bunlar $\lambda\to\infty$ için (4d) ile aynı davranır, integranddan sözü edilen verimli algoritmalar ile hesaplanabilecek parçayı ayırıp kalan mutlak yakınsak parçaları doğrudan sayısal olarak integre etmeye imkan verir.

Gözlem z=d düzleminin üstündeki bölgede yapıldığında (3), yarı boş uzayın Green Fonksiyonunu tüm noktalarda verir. Gözlem noktası z=d düzleminin altındaki bölgede olduğunda, göz önüne alınması gereken sadece tanımlanmış z_A,z_B,z_C fonksiyonlarının ters işaretli halleridir. ($z_A(q,p)= z_p+z_q-2d$, $z_B(q,p)= z_p-z_q$, , $z_C(q)= z_q-d$ ve $z_C(p)= z_p-d$).

3.Birinci Türden İntegral Denklemin Çözümü

Boş uzayda ele alınan tipteki bir halkadan saçılma [7] ‘de ayrıntıları ile yer almaktadır. Green fonksiyonu verilen bir uzay için de yöntem bu yeni duruma kolayca genişletilebilir. Söz konusu halka eksenel simetrili olduğu için iki boyutlu (1) integral denklemi tek boyutlu sonsuz elemanli birinci türden denklemlere indirgenebilir:

$$2\pi\int_a^b j_n(r_p)G_n(r_p,r_q)r_p\,dr_p = g_n(r_q), \qquad r_q\in[a,b], \quad n=0,\pm1,\pm2,... \tag{5a}$$

Burada a halkanın iç yarıçapı, b halkanın dış yarıçapı, r_p, ve r_q q ve p noktalarının r koordinatları (silindirik), $g_n(r_q)$ gelen dalganın, j_n bilinmeyen fonksiyonun, G_n Green fonksiyonunun halka üzerindeki Fourier katsayılarıdır.

(5a) denklemini ortonormal Chebyshev polinomları ile ele alabilmek için [a,b] aralığının lineer bir dönüşüme tabi tutulmasi gerekir.Bu dönüşüm [a,b] aralığındaki noktaları Chebyshev polinomlarinin içinde tanımlı olduğu [-1,1] aralığına bire bir olarak tasvir etmelidir. Bu türden bir dönüşüm olacak $r_q=\eta(u)$ ($r_p=\eta(v)$), genel halde pozitif türeve sahip olmalıdır ($\eta'(u)>0$). Hesaplamalarda kullanılan özel dönüşüm aşağıda verilmektedir:

$$\eta(u)=\frac{b-a}{2}u+\frac{a+b}{2}; \qquad b>a,\ u\in[-1,1] \tag{5b}$$

Değişkenleri uygun biçimde gösterdikten sonra yeni değişkenlerle (5a) denklemi şu hali alacaktir

$$\int_{-1}^{1}\left\{-\frac{1}{\pi}ln|u-v|+K_n(u,v)\right\}x_n(v)dv=\tilde{g}_n(u);\ u\in[-1,1] \qquad n=0,\pm1,\pm2,.. \tag{6}$$

Burada, $K_n(u,v)$ ve $\tilde{g}_n$ yeterince düzgün fonksiyonlardir ve bilinmeyen fonksiyon x_n ile beraber Chebyshev polinomlari ile seriye açilabilirler. $K_n(u,v)$ düzgün fonksiyonu şu biçimdedir:

$$K_n(u,v)=-\frac{1}{\pi}\left\{ln|u-v|\sum_{m=2}^{3}A_m^n(u)|u-v|^m\right\}-\frac{1}{\pi}H_3^n(u,v) \tag{7a}$$

Öyle ki $H_3^n(u,v)$ üçüncü mertebeden sürekli türevlere sahiptir ve;

$$A_2^n(u)=\frac{[k\eta'(u)]^2}{4}-\frac{n^2-1/4}{4}\left(\frac{\eta'(u)}{\eta(u)}\right) \tag{7b}$$

$$A_3^n(\mathrm{u}) = \frac{n^2 - 1/4}{4}\left(\frac{\eta'(u)}{\eta(u)}\right)^3 \qquad (7c)$$

Chebyshev polinomlarının ortonormalliği de kullanılarak, seriye açılmış ifadeler (6) denkleminde yazıldığında, sonsuz boyutlu bir lineer cebrik denklem sistemi elde edilir:

$$\gamma_s^{-2} x_{ns} + \sum_{m=0}^{\infty} k_{sm} x_{ns} = b_s, \ s=0,1,2,3,... \qquad (8)$$

Burada $\gamma_0 = (\ln 2)^{-1/2}$; $\gamma_s = |s|^{1/2}$, $s \neq 0$, her $n=0,\pm1,\pm2,\pm3...$ x_{ns} bilinmeyen fonksiyonun, b_s uyarma teriminin, k_{sm} $K_n(u,v)$ çekirdeğinin Fourier - Chebyshev katsayılarıdır. (8) sistemi Ortogonal Polinomlar Yöntemi ([1], [2]) ile gelinmiş son aşamadir ve birinci türden sonsuz lineer cebrik denklem sistemidir. Böyle bir sisteme Analitik Regülerleştirme basit bir biçimde yeni $y_n=x_n/\gamma_n$ değişkenleri tanımlanıp, denklemleri γ_n ile çarparak gerçekleştirilebilir. Sonuç olarak, I ve H karesi toplanabilir dizilerin uzayı l_2'de de kompakt operatörler olmak üzere, elde edilen sistem, l_2'de ikinci türden $(I+H)x=b$, x, b$\in l_2$ biçimindeki lineer cebir denklemlerinden ibarettir.

Kaynaklar

[1] G.Ya.Popov. On one approximate method for solving the integral equation of wave diffraction by finite width strip - Zhurnal tekhnicheskoy fiziki, 1965, v. 35, n. 3, p.p. 381-389 (in Russian).

[2] G.Ya.Popov. On Orthogonal polynomials method in contact problem of the elasticity theory - Prikladnaya matematika i. mekhanica, 1969, V. 33, N3 (in Russian)

[3] Yu.A.Tuchkin. Wave scattering by unclosed cylindrical screen of arbitrary profile with Dirichlet boundary condition. - Soviet Physics Doclady, 1985, v. 30. p.p. 1027-1030

[4] Yu.A.Tuchkin. Wave scattering by unclosed cylindrical screen of arbitrary profile with Neumann boundary condition. - Soviet Physics Doclady, 1987, v. 32, p.p. 213-216

[5] Yu.A.Tuchkin. Regularization of boundary value problem of wave diffraction by toroidal screen of arbitrary profile - in the book: Electrodynamics of open structure of millimetre and sub-millimetre wave range. - Publishing house of IRE Acad. Sci. The Ukr. SSSR,Kharkov, 1990 (in Russian)

[6] Fatih Dikmen, Eylem Özkan, Yury A. Tuchkin. Scalar Wave Diffraction from infinitely thin perfectly soft finite-length circular cylinder. Day On Diffraction 2001, International Seminar, St. Petersburg, May 29-31,2001.

[7] F. Dikmen, E. Karacuha, Yu.A. Tuchkin. Scalar Wave Diffraction by a Perfectly Soft Infinitely Thin Circular Ring. Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences “Elektrik”, Vol:9 No:21,2001.

[8] Yu.A. Tuchkin, E. Karacuha, F. Dikmen. Scalar Wave Diffraction from Infinitely Thin Circular Ring, Proc. of International Symposium on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory - MMET’98, Kharkov, Ukraine.

[9] J.A. Stratton. “Electromagnetic Theory” Mc-Graw Hill 1941.