

Genelleştirilmiş Kalem Metodunun Akustik İki Katmanlı Green Fonksiyonlarına Uygulanması ve Yöntemin Akustik Parametrelerin Değişimine Etkisi

Hazel Yücel, Okan Berk Gazioğlu*
Başkent Üniversitesi
Bilgisayar Mühendisliği
Ankara
hazely@baskent.edu.tr,
Başkent Üniversitesi
Elektrik Elektronik Mühendisliği
Ankara
okangazioglu@gmail.com

Özet: Fotoakustik görüntüleme yaygın kullanılan Geri çatma algoritması, akustik katmanlı Green fonksiyonlarının hesaplanmasına ihtiyaç duymaktadır. Geri çatma algoritmasının katmanlı ortamlarda gerçek zamanlı olarak kullanılabilmesi için hesaplanmaları oldukça uzun süren integral ifadeler olarak elde edilen akustik katmanlı Green fonksiyonlarının hesabının hızlandırılması gerekir. Bunun için bu çalışmada Green fonksiyonları genelleştirilmiş kalem metoduyla (Gpof) kompleks üstel fonksiyonların toplamı şeklinde yazılarak, sayısal benzetimler ile iki katmanlı yapılar için akustik katmanlı Green fonksiyonlarının hesaplanma sürelerinin kısaltıldığı gözlemlenmiş ve Gpof metodunun akustik ortam parametreleri değişimine olan hassasiyeti incelenmiştir.

Abstract: Back-Projection algorithm which is widely used in photoacoustic imaging, requires the calculation of Green functions with acoustic layers. Back-Projection algorithm to be used in real time in layered medias, it is necessary for increasing speed of the computation of the acoustic layered Green functions obtained as integral expressions. For this purpose, in this study, Green functions are written as the sum of complex exponential functions with the generalized pencil method (Gpof), with numerical simulations it is observed that the computation time of the acoustic layered Green functions for two-layer structures is shortened, and the sensitivity of the Gpof method to the change of acoustic parameters of environment is investigated.

1. Giriş

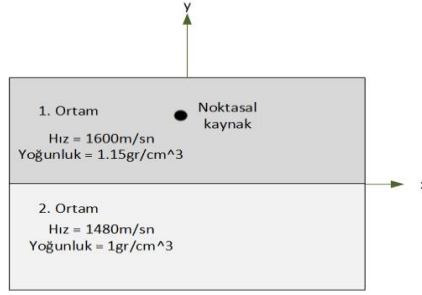
Fotoakustik görüntüleme, kısa laser darbeleri kullanılarak ısıtılan dokuda meydana gelen genişleme-büzüşme hareketi sonucu oluşan titreşime bağlı dokunun yüksek frekanslı (megahertz mertebesinde) akustik dalga kaynağı şeklinde davranmaları ve akustik dalga yaymalarına yol açan prensibe dayanan tümleyici, noktasal ve kontrast çözünürlüğü yüksek, zararsız bir görüntüleme tekniğidir. Oluşan bu fotoakustik dalgalar yüzey üzerinden ultrasonik transdüserle ölçülüp, işlenerek fotoakustik görüntüye dönüştürülür. Ters kaynak problemi olarak da adlandırılan fotoakustik görüntüleme de kolay uygulanabilirliği nedeniyle Geri-çatma algoritması yaygın olarak kullanılmaktadır.[3] Geri çatma algoritmasında kullanılan akustik Green fonksiyonları homojen ve sonsuz uzayda analitik olarak ifade edilebilirken, pek çok pratik uygulamada ortamlar katmanlı olup katmanlı Green fonksiyonlarına ihtiyaç duyulur. Akustik katmanlı Green fonksiyonları integral ifadeler olarak elde edildiğinden hesaplanmaları oldukça uzun zaman almaktadır. Bu ise fotoakustik görüntüleme kullanılan Geri çatma algoritmasının gerçek zamanlı olarak kullanılabilirliğini zorlaştırmaktadır.

Bu çalışmada, iki katmanlı düzlemsel yapı alınıp her katmanın farklı akustik parametrelere sahip olduğu varsayımı ile, katman sınırlarında süreklilik koşulları ve alt ve üst yarı düzlemde radyasyon koşulları kullanılarak integral ifadeler olarak elde edilmiş olan akustik katmanlı Green fonksiyonlarına Gpof metodu uygulandığında hesaplanma sürelerinin kısaltıldığı sayısal benzetimler ile gösterilmiştir.[2] Ayrıca katmanlı akustik ortam parametreleri (ortamın akustik hızı ve yoğunluğu) değiştiğinde Gpof metodunun bu değişime göre verimliliği incelenmiştir.

2. Problemin İfadesi ve Genelleştirilmiş Kalem Metodunun Akustik İki Katmanlı Green Fonksiyonlarına Uygulanması

Fotoakustik görüntüleme kullanılacak ortam geometrisi iki katmanlı yapı olarak Şekil 1 deki gibi modellenmiştir. Fotoakustik görüntüleme fotoakustik dalga denkleminin ters çözümüne dayanır ve fotoakustik dalga denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir. [3]

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) p(r,t) = p_0(r) \frac{\partial \delta(t)}{\partial t} \quad (1)$$



Şekil 1. Problem geometrisi.

Burada $p(r,t)$: Akustik dalga fonksiyonu; c : Akustik dalganın hızı; $p_0(\mathbf{r})$: kaynak fonksiyonu; $\delta(t)$: elektromanyetik uyarma darbесidir. (1) denkleminin katman sınırlarında süreklilik koşulu ve sonsuzda radyasyon koşulu altında Fourier dönüşümünü de kullanarak (1) denkleminin düz çözümü (ölçüm fonksiyonu) katmanlı Green fonksiyonları ve kaynak fonksiyonunun süperpozisyonu şeklinde

$$P(\mathbf{r}_s, \omega) = -i\omega \int_V p_0(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \omega) d\mathbf{r} \quad (2)$$

ifade edilir. Burada V kaynağı içeren bölgeyi, $\mathbf{r} = (x, y)$ ve $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s)$ sırasıyla kaynak yeri ve ölçüm yerini ifade etmektedir. Katmanlı ortamlar için kaynak fonksiyonu, Geri-çatma algoritmasını kullanarak akustik katmanlı Green fonksiyonlarını içerecek şekilde aşağıdaki gibi yazılır. [3]

$$p_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi} \frac{\rho_s}{\rho} \int_S \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{r}_s, \omega) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)}{\partial \mathbf{n}} d\omega dS. \quad (3)$$

Burada ρ ve ρ_s sırasıyla kaynağın bulunduğu katmanın ve ölçüm yerinin yoğunluğudur. İki katmanlı yapı için kaynak ve gözlem noktaları aynı ve farklı bölgelerde olmak üzere sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilir

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{jk y_1} (e^{-jk y_1 |y-y'|} + \frac{p_2 k y_1 - p_1 k y_2}{p_2 k y_1 + p_1 k y_2} e^{-jk y_1 |y+y'|}) e^{-jk_x(x-x')} dk_x$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{jk y_1} (\frac{p_1 k y_1}{p_2 k y_1 + p_1 k y_2} e^{-jk y_2 y'} \cdot e^{-jk y_1 y} \cdot j k y_1) e^{-jk_x(x-x')} dk_x \quad (4)$$

Burada ρ_i ler ortamların yoğunluğu, $k_x^2 = k_i^2 - k_{z_i}^2$ ω : frekans ve $k_i \omega / c_i$: dalga sayısı, c_i : akustik dalga yayılım hızıdır. ($i = 1, 2$) (3) denkleminde görüldüğü gibi fotoakustik görüntülemeye kullanılan Geri çatma algoritmasında birçok kez hesaplanmak durumunda kalan ve (4) denklemi ile verilen akustik iki katmanlı Green fonksiyonları analitik olarak hesaplanamayan integraller içerdiğinden dolayı hesaplarda sayısal integrasyon teknikleri kullanılır. Bu da oldukça uzun zaman alır ve gerçek zamanlı fotoakustik görüntülemeyi mümkün kılmaz. Gpof metodu uygulayarak kapalı form akustik katmanlı Green fonksiyonlarının ifadelerinin yanı sıra hesaplama süreleri hızlandırılarak gerçek zamanlı fotoakustik görüntüleme sağlanır. Spektral düzlemde elde edilen akustik katmanlı Green fonksiyonunun bileşenlerinin üstel terimlerin toplamı olarak yazılması için parçalı örnekleme yolu kullanılır. İki katmanlı ortamda kaynak ve gözlem noktası Şekil 1 de görüldüğü gibi 1. bölgede olmak üzere, elde edilen akustik katmanlı Green fonksiyonlarının integral ifadeleri (4) tekil noktalar içerdiğinden integrasyon yolu

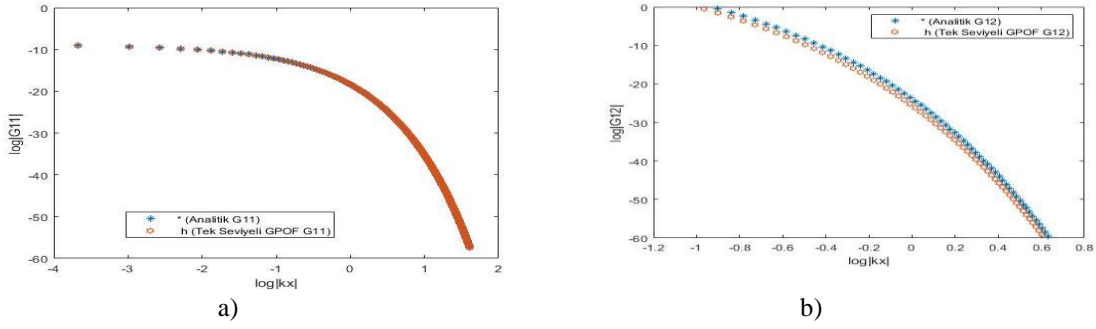
$$k_{z_1} = k_1(-it + (1 - tT_0)) \quad (5)$$

olarak tanımlanır. [1] (4) denklemi ile verilen akustik katmanlı Green fonksiyonu spektral uzayda Gpof metodu ile Sommerfeld özdeşliğide kullanılarak $H_0^{(2)}$ Hankel fonksiyonu olmak üzere kapalı formda aşağıdaki gibi yazılır.

$$G = H_0^{(2)}(k_i r) + \sum_{n=1}^M b_n H_0^{(2)}(k_i r_1) \quad (6)$$

3. Sayısal Benzetim

(5) denklemi ile verilen integrasyon yolu kullanılarak $0 \leq t \leq T_0$ eşitsizliği geçerli olmak üzere $T_0 = 5$ örnekleme sayısı = 200 alınıp, frekans= 3MHz alınarak aşağıdaki sayısal benzetimler yapılmıştır.



Şekil 2.a) Kaynak ve gözlem noktası aynı bölgede olmak üzere elde edilen akustik katmanlı Green fonksiyonunun (G_{11}) Gpof metodu ve integral ile elde edilmişinin karşılaştırması. b) Kaynak ve gözlem noktası farklı bölgelerde olmak üzere elde edilen akustik katmanlı Green fonksiyonunun (G_{12}) integral hesabı ile ve Gpof metodu uygulanmış hesabının karşılaştırması.

Şekil 2 de görüldüğü gibi akustik katmanlı Green fonksiyonlarının integral ifadelerinin ve Gpof metodu uygulanarak elde edilen ifadelerinin integrasyon değişkenine göre karşılaştırılması verilmiştir.

Tablo 1. GPOF metodu uygulanan akustik katmanlı Green fonksiyonu ve sayısal integrasyon ile hesaplanmış akustik katmanlı Green fonksiyonun hesaplanma zamanları.

	Akustik katmanlı Green (sn.)	GPOF Akustik katmanlı Green (sn.)
G_{11}	0.005218	0.001982
G_{12}	0.061453	0.051792

Tablo I de görüldüğü gibi Gpof uygulanarak akustik katmanlı Green fonksiyonlarının hesaplanma zamanları hızlanmıştır. Bu da fotoakustik görüntülemeye birçok kez hesaplanacak olan akustik katmanlı Green fonksiyonları için zaman olarak önemli bir fark yaratacaktır.

Tablo 2. Gpof metodunun Akustik katmanlı Green fonksiyonunun (G_{11}) akustik parametrelerinin oransal değişimine etkisi.

	1.01	1.08	1.35	1.68
$c1/c2$	2.44	3.55	8.67	13.78
Bağıl hata (Yüzde)	1.01	1.08	1.35	1.68
$\rho1/\rho2$	0.47	1.93	7.08	12.19
Bağıl hata (Yüzde)				

Tablo II de görüldüğü üzere ortam yoğunlukları sabit kalıp akustik hızların oranları arttığında Gpof metodunun hassasiyeti azalmaktadır.(Normal integral hesabı ve Gpof uygulanarak elde edilen hesap arasındaki bağıl hata artmaktadır.) Benzer şekilde ortamın akustik hızlarını sabit bırakıp Gpof metodunun ortamların yoğunluklarının oranlarının değişimine olan hassasiyeti de azalmaktadır.

4. Sonuç

İki Katmanlı ortam için elde edilen akustik Green fonksiyonu Genelleştirilmiş kalem metodu (Gpof) ile kapalı formda yazılmıştır. Gpof metodu yardımı ile akustik katmanlı Green fonksiyonlarının hesaplanma süreleri hızlandırılmış ve katmanlı ortamın akustik parametrelerinin değişiminin Gpof metodunun verimliliğine olan etkisi incelenmiştir.

5. Teşekkür

Bu çalışma 119E624 nolu proje kapsamında TÜBİTAK tarafından desteklenmektedir.

Kaynaklar

- [1] G. Dural ve M. I. Aksun, "Closed-form Green's functions for general sources and stratified media," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 43, sayfa. 1545-1552, July 1995
- [2] Y. Hua ve T.K. Sarkar, "Generalized pencil-of-function method for extracting poles of an EM system from its transient response," IEEE Tans. Antennas and Propagation, vol 37 sayfa.229-234, May 1989
- [3] Uzun, B and Yücel, H. "An Inverse Source Problem Connected with Thermoacoustic Imaging in Multi-layer Planar Medium", Journal of Mathematical Imaging and Vision, 61(3), 2019.