

İki-Denklem İki-Bilinmeyen ve N-Denklem N-Bilinmeyen Yöntemleri için Zaman Uzayı Sonlu Farklar Uygulaması

Talha Saydam, Serkan Aksoy
Gebze Teknik Üniversitesi
Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kocaeli
tsaydam@gtu.edu.tr, saksoy@gtu.edu.tr,

Özet: Zaman Uzayı Sonlu Farklar (ZUSF) elektromanyetik problemlerin çözümünde etkin kullanılan bir yöntemdir. ZUSF ile hesaplanan zaman uzayındaki işaretleri frekans uzayına dönüştürmek için genellikle Fourier dönüşümü kullanılır. Fourier dönüşümünün doğru uygulanabilmesi için işaretin geçici halden sonraki en az bir periyotluk kısmına ihtiyaç duyulmaktadır. Ancak bazı problemler doğası gereği hesaplama bakımından büyük ölçeklidir. Bu tür problemlerin ZUSF çözümü, zaman uzayındaki hesap noktasının artması nedeniyle oldukça zordur. Bu çalışmada, Fourier dönüşümüne alternatif olarak, işaretin bir periyodundan daha az hesap noktasına ihtiyaç duyan iki zaman-frekans uzayı dönüşüm yönteminin performansı incelenmiştir.

Abstract: Finite Difference Time Domain (FDTD) is an efficient method for the solution of electromagnetic problems. To convert time domain signals to frequency domain from the FDTD simulations, a Fourier transformation technique is used widely. To apply the Fourier transform properly, at least, a full cycle period of time domain signal after transient regime is necessary. However, some problems are inherently computationally large scale. The FDTD solutions of these problems are cumbersome due to the excessive number of temporal computation points. In this study, as an alternative to Fourier method, the performance of two time-frequency conversion methods which require less computation points than one period are investigated.

1. Giriş

Günümüzde, elektromanyetik problemlerin çoğu karmaşık ve hesaplama bakımından büyük ölçekli yapıya sahiptir. Bu tür büyük ölçekli problemlerin ZUSF veya diğer sayısal yöntemler ile çözümünde çeşitli zorluklarla karşılaşmaktadır. Hesaplama bakımından büyük ölçeklilik sayısal yöntemdeki hesap noktası sayısının çok yüksek olması anlamına gelir. Düşük ve yüksek frekans problemleri hesaplama bakımından büyük ölçekli olabilirler. Yüksek frekans problemleri kısa dalga boylarından dolayı büyük cisimler veya hesap alanları için elektriksel olarak büyük ölçekli problemlerdir. Bu durum hesap noktası sayısının çok fazla olması anlamına gelir. Düşük frekans problemleri ise dalga boyu büyük olduğundan elektriksel olarak küçük ölçeklidirler. Bu tür problemlerde, saçıcılar ve/veya antenler dalga boyuna göre çok küçük olduğundan, bu yapıların geometrik olarak doğru modellenmesi için yüksek hesap noktası sayısına ihtiyaç duyulur. Sonuç olarak hesaplama bakımından büyük ölçekli problemlerin ZUSF yöntemi ile makul sürelerde çözülebilmesi için çeşitli hızlandırma tekniklerine ihtiyaç vardır. Bu hızlandırma teknikleri ZUSF yönteminin çekirdek algoritması değiştirilmesi [1-3], GPU veya CPU üzerinden paralel algoritma geliştirilmesi [4] ve zaman-frekans dönüşüm teknikleri ile sağlanır.

Zaman-frekans dönüşüm tekniklerinin kullanım amacı zaman uzayındaki işaretleri frekans uzayına dönüştürerek kararlı halde (steady-state) genlik ve faz bilgisine ulaşmaktır. Bu amaç için tepe tespiti (peak detection) [5] ve Fourier dönüşümü yaygın kullanılan yöntemlerdir. Tepe tespiti yöntemi hesap süresi bakımından verimsiz olup, faz hesapları hatalıdır. Fourier dönüşümü yöntemi ise yüksek doğrulukla genlik ve faz hesabı imkanı verir. Fakat, Fourier dönüşümünün uygulanması için işaretin geçici halden (transient) sonra en az bir tam periyotluk kısmına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu durum hesaplama bakımından büyük ölçekli problemler için hesap sürelerinin çok yüksek olması anlamına gelir. Bu kapsamda, bu iki yönteme alternatif olarak tek frekanslı kaynaklar için İki-Denklem İki-Bilinmeyen, 2D-2B (Two-Equations Two-Unknowns) yöntemi önerilmiştir [6]. Bu yönteminin avantajları programlanma kolaylığı, daha az hesap noktası ile yüksek doğrulukta genlik ve faz bilgisi vermesi ve hata analizlerinin yapılmış olmasıdır [7].

2D-2B yöntemi çok frekanslı elektromanyetik problemlerin çözümü için N-Bilinmeyen N-Denklem, NB-ND (N-Equations N-Unknowns) olarak genişletilmiştir [8]. Ayrıca, Yüksek Tanımlı ZUSF [9] ve Yüksek Çözünürlüklü ZUSF gibi farklı isimlerde ama gerçekte 2D-2B ve ND-NB yöntemi ile aynı olan çalışmalarda mevcuttur [10].

Bu çalışmada 2D-2B ve ND-NB yöntemlerinin performansı incelenmiştir. Bu amaç için, bir dielektrik küreden saçılma probleminin ZUSF çözümü üzerinden 2D-2B yöntemi ve bir mono-statik Yüksek Frekans (YF) radar probleminin ZUSF çözümü üzerinden ND-NB yöntemi uygulanmıştır.

2. İki-Denklem İki-Bilinmeyen (2D-2B) Yöntemi

2D-2B yöntemi tek frekanslı bir ZUSF çözümündeki iki bilinmeyenin (genlik ve faz), iki denklemin çözümünden çıkarılması esasına dayanır [6]. Bu yöntemin uygulanması için zaman uzayındaki işaretin geçici halden sonra, zamanda kısa bir kısmına ihtiyaç duyulur. Burada ZUSF konum uzayındaki herhangi bir noktada t_1 ve t_2 anlarındaki alan ifadeleri q_1 ve q_2 olmak üzere

$$q_1 = A \sin(\omega t_1 + \theta) \quad (1)$$

$$q_2 = A \sin(\omega t_2 + \theta) \quad (2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ω açısal frekans, A genlik ve θ fazdır. Bu iki denklem A ve θ için çözümlerse

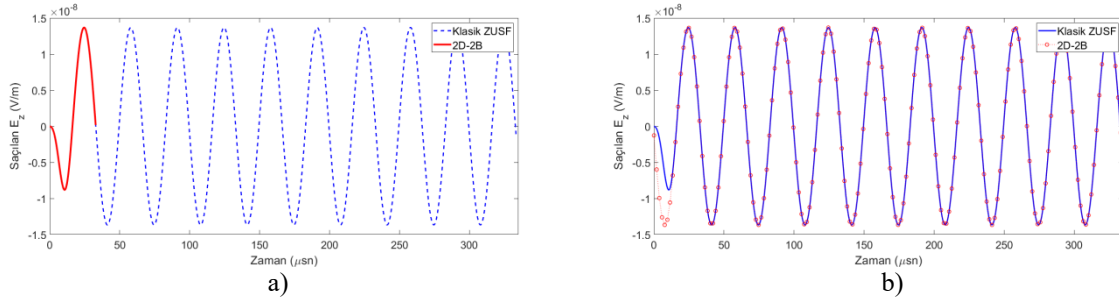
$$A = \left| \frac{q_1}{\sin(\omega t_1 + \theta)} \right| \quad (3)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{q_2 \sin(\omega t_1) - q_1 \sin(\omega t_2)}{q_1 \cos(\omega t_2) - q_2 \cos(\omega t_1)} \right] \quad (4)$$

ifadeleri bulunur. Burada t_1 ve t_2 noktalarının seçimi oldukça önemlidir. Örneğin bu noktaların birbirine çok yakın seçilmesi, yuvarlama hatalarının baskın olmasına neden olabilir. Bu noktalar bir periyodun dörtte birlik kısmı içinde seçilebilir.

2.1. 2D-2B Örneği

2D-2B yönteminin performansını incelemek amacıyla üç boyutlu dielektrik bir küreden saçılan alanlar hesaplanmıştır. Kaynak olarak 30 kHz ($\lambda = 10000$ m) frekanslı bir E_z noktasal kaynağı kullanılmıştır. Kayıpsız dielektrik ($\epsilon_r = 4$) malzemeden yapılan kürenin çapı 1.5 metredir. Bu problem dalga boyu kürenin çapından çok büyük olduğundan, elektriksel olarak küçük ölçekli bir problemdir. Küreden saçılan alanlar ZUSF yöntemiyle 10 periyot boyunca ve 2D-2B yöntemi ile yarım periyot boyunca (geçici ha sonrası) hesaplanmıştır. Şekil 1'de tek bir konumda klasik ZUSF ve 2D-2B yöntemi ile hesaplanan saçılan alanlar gösterilmektedir. İki yöntemin performansı Tablo 1'de karşılaştırılmıştır.



Şekil 1. a) Zaman uzayında saçılan E_z alanı, b) 2D-2B ile yapılandırılmış saçılan E_z alanı.

Tablo 1. Hafıza kullanımı ve hesap süreleri.

Yöntem	Hafıza (MB)	Hesap süresi (saat)	İterasyon sayısı
2D-2B	38.1	11.7	174075
Klasik ZUSF	66	115.6	1740755

3. İki-Denklem İki-Bilinmeyen (ND-NB) Yöntemi

ND-NB yöntemi çok frekanslı problemler için geliştirilmiş bir zaman-frekans uzayı dönüşüm tekniğidir [8]. Bu yöntemde geçici hal sonrası, işaretin tüm frekans bileşenlerine ait genlik ve faz bilgisi işaretin çok kısa bir kısmı kullanılarak hesaplanır. Bu yöntemde n tane frekans bileşeni içeren bir alan ifadesi

$$f(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^n A_i(\vec{r}) \sin(\omega_i t + \theta_i(\vec{r})) \quad (5)$$

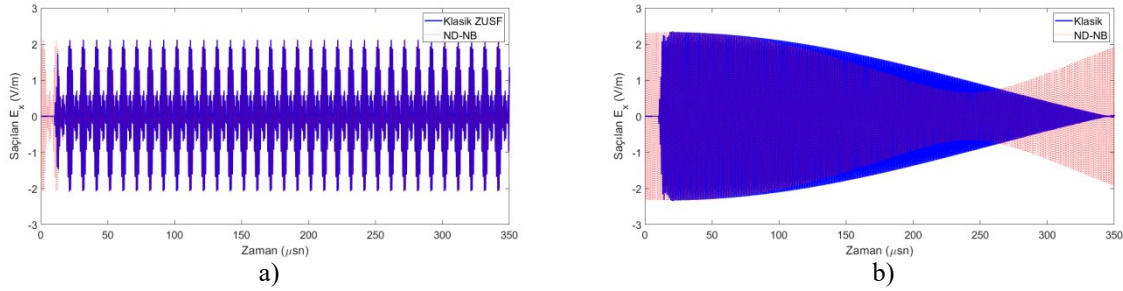
şeklinde yazılabilir. Burada \vec{r} pozisyon vektörüdür. ZUSF yöntemiyle A_i ve θ_i değerleri, bir ters matris çözümü tekniği kullanılarak hesaplanır. ND-NB yöntemi ile ilgili detaylar [8]'da yer almaktadır.

3.1. ND-NB Örneği

ND-NB yönteminin performansını incelemek için, iki boyutlu bir mono-statik YF radar problemi ZUSF yöntemiyle çözülmüştür. Bu çalışma zaman uzayı işaretleri üzerinden ND-NB yönteminin literatürdeki ilk uygulamasıdır. Problem uzayı bir kara parçası, deniz-hava ara yüzü, bir ada ve bir eğimli mono-statik antenden meydana gelmektedir. Anten üç frekans bileşenine sahip bir $\sum_{i=1}^3 f_i$ kaynağı ile uyarılmıştır. Problem uzayının elektromanyetik parametreleri $\epsilon_{kara} = 13\epsilon_0$ F/m, $\sigma_{kara} = 0.005$ S/m, $\epsilon_{deniz} = 80\epsilon_0$ F/m, $\sigma_{deniz} = 4$ S/m, $\epsilon_{ada} = 10\epsilon_0$ F/m, $\sigma_{ada} = 0.002$ S/m ve tüm problem uzayı için $\mu = \mu_0$ şeklindedir. Bu kapsamda ND-NB yönteminin başarılı ve başarısız olduğu iki durum incelenmiştir.

Birinci örnekte (başarılı) kaynak frekansları 1.00 MHz, 1.10 MHz ve 1.20 MHz olmak üzere adadan saçılan alanlar klasik ZUSF ve ND-NB yöntemi ile hesaplanmıştır (Şekil 2a). İkinci örnekte (başarısız) ise kaynak frekansları 1.000 MHz, 1.001 MHz and 1.002 MHz olarak değiştirilmiştir (Şekil 2b).

Başarısız olan ikinci örnekte kaynak frekanslarının birbirine çok yakın olması sebebiyle ND-NB matrisi kötü koşullanmış (ill-posed) olduğundan, genlik ve faz değerleri doğru hesaplanamamıştır.



Şekil 2. Zaman uzayında saçılan E_x alanı a) başarılı örnek, b) başarısız örnek.

4. Sonuç

Bu çalışmada 2D-2B ve ND-NB yöntemlerinin performansları sayısal örneklerle incelenmiştir. Sonuç olarak bu yöntemlerin hafıza kullanımı ve hesap süresi bakımından oldukça verimli olduğu gösterilmiştir. Özel olarak, ND-NB yönteminin başarısız olduğu bir durum incelenmiştir. İşaretin kararlı hale geçtiği zamanın kesin değerinin bulunması ve ND-NB yönteminin hata analizinin detaylı bir şekilde yapılması gelecek çalışmaları arasında planlanmaktadır.

Kaynaklar

- [1] Özakin M. B. ve Aksoy S. "Application of magneto-quasi-static approximation in the finite difference time domain method", IEEE Trans. on Magnetics, cilt.52 no.8, s.7209809, 2016.
- [2] Hou W., Azadifar M., Rubinstein M. vd. "An efficient FDTD method to calculate lightning electromagnetic fields over irregular terrain adopting the moving computational domain technique", IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, cilt.62 no.3, s.976-980, 2019.
- [3] Garcia S. G., Bretones A. R., Rubio R. G. vd. New trends in FDTD methods in computational electrodynamics: Unconditionally stable schemes. Recent Research Developments in Electronics Volume 2, Transworld Research Network, s.55-96, 2004.
- [4] Chew W. C. ve Jiang L. J. "Overview of large-scale computing: The past, the present, and the future", Proceedings of the IEEE, cilt.101 no.2, s.227-241, 2013.
- [5] Gandhi O. P. ve Chen J. Y. "Numerical dosimetry at power-line frequencies using anatomically-based models", Bioelectromagnetics Supplement, cilt.1, s.43-60, 1991.
- [6] Furse C. M. ve Gandhi O. P. "Calculation of electric fields and currents induced in a millimeter-resolution human model at 60 Hz using the FDTD method", Bioelectromagnetics, cilt.19, s.293-299, 1998.
- [7] Saydam T. ve Aksoy S. "Error analysis of the two-equations two-unknowns method for low-frequency FDTD problems", Journal of Computational Electronics, cilt.19 no.4, s.1573-1578, 2020.
- [8] Furse C. M. "Faster than Fourier: Ultra-efficient time-to-frequency domain conversions for FDTD", IEEE Antennas and Propagation Magazine, cilt.42 no.6, s.24-33, 2000.
- [9] Crozier S., Zhao H., Feng L. "A new FDTD method for the study of MRI pulsed field gradient-induced fields in the human body", Seventh Australian and New Zealand Intelligent Inf. Sys. Conf., Perth, Avustralya, Kasım 2001.
- [10] Zhao H., Crozier S., Liu F. "A new approach to the solution of Maxwell's equations for low-frequency and high-resolution biomedical problems", Anziam Journal, cilt.44, s.C851-C867, 2003.