Dielektrik Cisimlerden Saçılma Problemi için Analitik Regülerleştirme Temelli Güçlü Bir Algoritma

Emrah Sever, Fatih Dikmen, Yury A. Tuchkin
Gebze Teknik Üniversitesi
Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kocaeli
emrahsever@gtu.edu.tr, dikmen@gtu.edu.tr, yury.tu@gmail.com

Özet: *Bu çalışmada, Analitik Regülerleştirme Yönteminin (ARY) bir dielektrik silindire uygulanması sunulmaktadır. İlk olarak, cebrik denklem sistemi matrisi 2 × 2'lik bir blok matris olarak oluşturulur. Daha sonra, ARY algoritmasının sol ve sağ taraf operatörleri, cebrik sistemi (I + H) y = b biçiminde ikinci tür yapmak üzere, uygulanır; burada I birim ve H l_2 uzayında kompakt bir operatördür. Algoritma, bir TM-z polarize düzlem dalga ile aydınlatılan bir dairesel dielektrik silindire uygulanmakta ve değişkenlerine ayırma yöntemi (DAY) çözümü ile doğrulanmaktadır. İkinci tür sistemin birinci tür sisteme üstünlüğü, cebrik sistemin kesme sayısına göre koşullanma sayısı ile gösterilmiştir.*

Abstract: *The application of the Analytical Regularization Method to a dielectric cylinder is presented. The algebraic system is constructed as a 2×2 block matrix. The left- and right-hand side operators of the ARM algorithm transform the algebraic system to a second kind one in form of (I+H)y=b where I the identity operator and H is a compact operator in space l_2. TM-z polarized plane wave illuminates a circular dielectric cylinder and the numerical results are validated by the separation of variables solution. The uniformly bounded condition number of the resulting second kind system is also demonstrated.*

1. Giriş

Özellikle elektromanyetik saçılma ve kırınım problemlerinde ortaya çıkan integral ve integral diferansiyel denklemlere uygulandıklarında, Analitik Regülerleşleştirme Yöntemi'nin (ARY) ve Yarı Ters Alma Prosedürünün (YTAP) temel fikirleri ve daha gelişmiş teknikleri, [1]'de yer almaktadır. ARY teorik arka planı ve YTAP farkı için bu kapsamlı referansa başvurulabilir. Bu çalışma özellikle ARY'nin dielektrik cisim sınır değer problemine (SDP) uygulanmasına odaklanmaktadır. Burada sunulan formülasyon önce [2] 'de önerilmiş ve ardından akustik problem için [1]'de detaylandırılmıştır. Geçirgen bir SDP ile saçılan alanın ifadesi, Green özdeşlikleri aracılığıyla integral bir gösterilim olarak [3] elde edilir ve bu integral denklem sisteminin momentler yöntemi veya Galerkin yöntemi ile ayrıklaştırılması, bir Ax=b biçiminde birinci türden sonsuz, kötü koşullu doğrusal cebrik denklem sistemi (DCDS1) ortaya çıkarır. Bu sistemin $x=A^{-1}b$ şeklindeki sayısal çözümü [4], A^{-1} hesabının kesme sayısına duyarlı ve yuvarlama hatalarına açık olmasından kaynaklıdır. Böyle bir birinci tür sistemi bir ARY ile ikinci tür bir sisteme dönüştürerek yuvarlama hatalarına karşı bağışık yeni bir sistem inşa etmek ve güvenilir sonuçlar elde etmek mümkündür. Bu çalışmada, dielektrik cisimler için kararlı ve iyi koşullandırılmış bir çözücü için ARY kullanılacaktır. Buna göre, sol ve sağ taraf operatörleri L ve R, DCDS1'e uygulandığında varılan DCDS2 (I+H)y=b olarak karşımıza çıkar. Burada I+H=LAR ve g=Lb olarak tanımlıdır. Bu yeni sistem, daha düşük kesme sayılarında bile kesme sayısından bağımsız olarak sayısal hesaplamalar için güvenli ve kararlıdır [5].

Tüm bölge Galerkin yöntemi ile keyfi olarak şekillendirilmiş sınırlar için ARY, tek mükemmel iletken (Mİ) sınırın saçılan alanının Elektrik Alan İntegral Denklemi (EAİD) ve Manyetik Alan İntegral Denklemi (MAİD) biçimindeki sınır integral denklemlerine uygulanmıştır [6], [7]. Buna ek olarak ARY, iki paralel empedans sınırı [8] ve iki katmanlı ve iki paralel dielektrik sınır [9] ile saçılma için cebrik-üstü yakınsak ve sayısal olarak kararlı algoritmalar oluşturmak için kullanılmıştır. Bununla birlikte, dielektrik engellerden saçılma için, regülerleştirme uygulanmış değildir, ancak hızlı yakınsak çözümler elde etmek için doğru tekillik değerlendirmesi yapılmıştır. Bu çalışmada ARY, karmaşık üstellerin temel ve test fonksiyonları olarak seçildiği Galerkin yöntemi ile ayrıklaştırılmış, dielektrik bir cisme ait sınırların sınır integral denklemlerine (SİD) uygulanacaktır. Cebrik sistemin girdileri, operatörlerin ve fonksiyonların 1 ve 2 boyutlu Fourier katsayıları olacaktır [10].

ARY'de yerel tekillik açılımı, kaynak ve gözlem noktalarının sınır üzerinde çakıştığı zaman ortaya çıkan Green fonksiyonunun ve türevlerinin tekilliklerini kaldırmak için çekirdeklere uygulanır. Bu amaçla, Green fonksiyonununkine benzer bir tekilliğe sahip olan analitik bir fonksiyon kullanılır. Bu fonksiyonun Fourier katsayıları analitik olarak bilinir ve ARY, bu katsayıların [5], [8], [9], [14] davranışına göre uygulanır.

Bu çalışmada, SDP'nin formülasyonu ilk olarak [1] 'de yapıldığı gibi akustik problem için oluşturulmuş ve daha sonra ortaya çıkan sistem, bir TM-z polarize düzlem dalgası ile aydınlatılmış sonsuz uzunlukta dielektrik silindirden elektromanyetik saçılma problemine uygulanmıştır.

2. Sınır Değer Probleminin Formülasyonu

TM-z kutuplu uyarma altındaki bir dielektrik silindirden saçılma için SDP ele alındığında şu fiziksel büyüklükler konu edilir:

$$u = E_z; \quad v = \frac{\partial E_z}{\partial n}; \quad g = 2E_z^{gel}; \quad f = 2\,\frac{\partial E_z^{gel}}{\partial n} \tag{1}$$

Manyetik geçirgenlikler için $\mu_- = \mu_+$ ve sabitler $\alpha^{(\pm)} = \beta^{(\pm)} = 1$ varsayımı altında [1]'de açıklanan integral denklem sistemi indirgendiğinde şu hali alır:

$$\begin{bmatrix} -\left[\bar{P}_{(+)} + \bar{P}_{(-)}\right] & l\left[\bar{Q}_{(+)} + \bar{Q}_{(-)}\right] \\ \left[\partial_n \bar{P}_{(+)} + \partial_n \bar{P}_{(-)}\right] & -l\left[\partial_n \bar{Q}_{(+)} + \partial_n \bar{Q}_{(-)}\right] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} lv \\ u \end{bmatrix} = \frac{l}{2}\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Burada köşegen bloklar yukarıdan aşağıya, TM (zayıf tekil), TE (hiper tekil) Mİ-EAİD çekirdekleri gibi iken, ters köşegen bloklar yukarıdan aşağıya, TE, TM Mİ-MAİD çekirdekleri gibidir [11]. Bu çekirdeklerin bileşimi bir karışık alan integral denklemi (KAİD) olarak düşünülebilir. $l = l(\theta) = \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} > 0$ kullanılan eğri paramterizasyonunun diferansiyel yay uzunluğunun gözlem noktasındaki değeridir ve hiper tekil terimin tekillğinin giderilmesine yardımcı bir çarpan olarak durmaktadır. 2 boyutta Helmholtz denkleminin Green fonksiyonunun

$$G\big(\eta(\theta), \eta(\tau)\big) = L(\theta - \tau) + p(\theta, \tau) \tag{3}$$

biçiminde $L(\theta - \tau)$ logaritmik tekillikli ve $p(\theta, \tau)$ ise daha düzgün bir fonksiyon olmak üzere ayrıştırılabileceği göz önünde tutulur ve şu tanım ile belirli Fourier açılımı kullanılır:

$$L(t) = -\frac{1}{2} + \ln 2\sin\frac{t}{2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{int}}{\tau_n^2}\,; \quad \tau_n = \max(1, |n|^{1/2}). \tag{4}$$

Artık F Fourier dönüşümü, $\eta = \eta(\theta)$ düzgün parametrizasyon fonksiyonu ve $f \circ \eta = f(\eta(\theta))$ işlemini tanımlayacak biçimde, sağ ve sol yan regülerleştiricileri, $T = \mathrm{diag}\{\tau_n^2\}$ biçiminde tanımlı operator sayesinde

$$L = [FT; \quad FT^{-1}]; \qquad R^{-1} = [T^{-1}F(l \cdot v \circ \eta\,); \quad TF(u \circ \eta)] \tag{5}$$

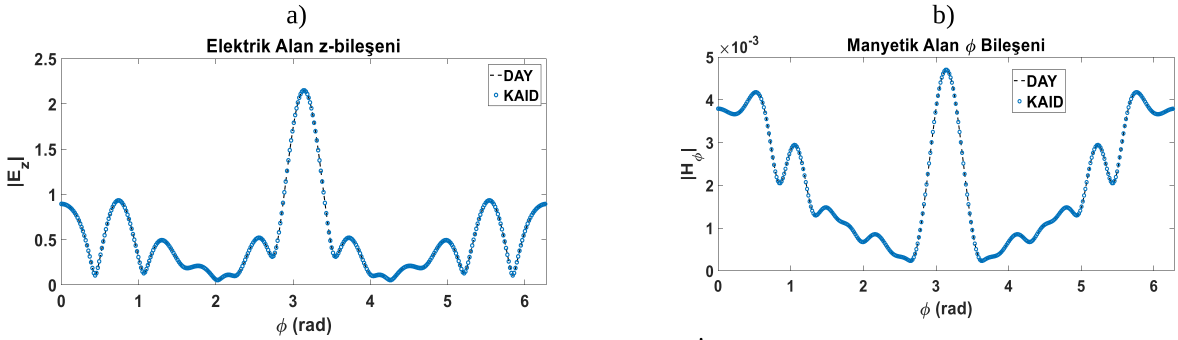
olarak verilebilir. (2) sisteminin ayrık hali olarak ortaya çıkan DCDS1 (4) operatörleri aracılığıyla [1] ile yordamlaştırılmış ARY ile işlenerek DCDS2'ye dönüşür.

3. Sayısal Sonuçlar

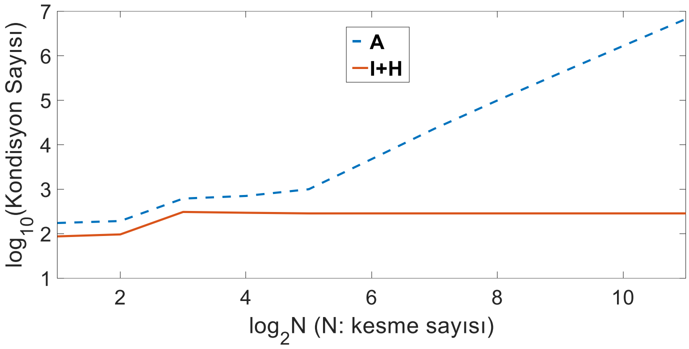
Yukarıda tanımlı TM-z kutuplu dalga saçılmasına dair ARY ile kurulmuş SDP çözümü düzlemsel dalga uyarması altında dielektrik dairesel bir silindiri aydınlatmaktadır. Boyuna sonsuz uzunluktaki bu silindir için problem iki boyuta indirgenebilir ve tüm dalga vektörlerinin bileşenleri elektrik alan vektörünün z-bileşeni E_z (ya da TE-z kutuplu durum için H_z) aracılığıyla verilen bir skaler problemin çözümüdür.

Şekil 1, dielektrik bir dairesel silindir için elde edilen sonuçların değişkenlerine ayrıştırma yöntemi (DAY) ile varılan sonuçlarla karşılaştırmasını barındırmaktadır. Dairenin yarıçapı $k_0 a = 2\pi$, bağıl dielektrik geçirgenlikler $\epsilon_{r+} = 1;\ \epsilon_{r-} = 4$ ve bağıl manyetik geçirgenlikler $\mu_{r-} = \mu_{r+} = 1$ olacak biçimde belirlenmiştir. Şekil a) E_z, ve şekil b) $H_\phi = \frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial n}$ vektör bileşenleri, DAY çözümleri ile mükemmel uyum içindedir ve önerilen algoritmanın dielektrik cisim için doğrulanması başarılmıştır.

Şekil 2 DCDS1 ve DCDS2 sistemlerinin kondisyon sayılarını göstermektedir. Artan kesme sayılarıyla ilki üstel olarak artan bir davranış sergilerken, ikincisi düzgün olarak sınırlı kalmaktadır. Bu anılan sistemlerin tipik davranışlarını yansıtmaktadır. Dielektrik bir silindirik saçıcıya dair SDP'nin ARY ile varılan çözümünün elde edildiği DCDS2, ele alınan problem bakımından iyi koşullu ve güvenilir bir çözüm sağlamaktadır.



Şekil 1. Dairesel silindir üzerinde DAY ve KAİD alan sonuçları karşılaştırması.



Şekil 2. Birinci ve ikinci tip cebrik denklem sistemlerinin matris koşullanma sayıları.

Kaynaklar

[1]. Tuchkin Y. A., "On the Analytical Regularization Method in Scattering and Diffraction,", Advances in Mathematical Methods for Electromagnetics, s. 303–328, Editörler: K. Kobayashi ve P. D. Smith, SciTech Publishing, Londra, 2020.

[2]. Tuchkin Y. A., "Regularization of one class of system of integral-differential equations of mathematical physics," (Rusça) Doclady Ukr. Natl. Acad. Sci., s. 47–51, 1997.

[3]. Chew. W. C. Waves and Fields in Inhomogenous Media. Wiley-IEEE Press New York, ABD, 1999.

[4]. Bates R. H. T., "Analytic Constraints on Electromagnetic Field Computations," IEEE Trans. Microw. Theory Tech., cilt. 23, no. 8, s. 605–623, 1975.

[5]. Poyedinchuk A. Y., Tuchkin Y. A., ve Shestopalov V. P., "New numerical-analytical methods in diffraction theory," Math. Comput. Model., cilt. 32, no. 9, s. 1029–1046, 2000.

[6]. Hatipoglu M. E., Dikmen F., Suvorova O. A., ve Tuchkin Y. A., "İki Boyutta Teğet Elektrik (TE) Durumda Elektrik Alan İntegral Denkleminin Çözümüne Üç Yaklaşım ve Analitik Regülerleştirilmeleri," URSI-TR Türkiye Bilimsel Kongresi, Ankara, 2016.

[7]. Güler S., Önol C., Ergül Ö., Hatipoğlu M. E., Sever, E., Dikmen F., ve Tuchkin Y. A., "Modified superformula contours optimized via genetic algorithms for fastly converging 2D solutions of EFIE," Proceedings IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, Fajardo, PR, ABD 2016.

[8]. Sever E., Tuchkin Y. A., ve Dikmen F., "On a superalgebraically converging, numerically stable solving strategy for electromagnetic scattering by impedance cylinders," J. Comput. Electron., cilt. 17, no. 1, s. 427–435, 2018.

[9]. Sever E., Dikmen F., ve Tuchkin Y. A., "Superalgebraically Converging Galerkin Method for Electromagnetic Scattering by Dielectric Cylinders," Radio Sci., cilt. 52, no. 10, s. 1282–1292, 2017.

[10]. Dikmen F., Sever E., Vatansever S., Tuchkin Y. A., ¨Well conditioned algorithm for scattering by a few eccentrically multilayered dielectric circular cylinders¨. Radio Sci., cilt 50 no: 2, s. 99-110, 2015

[11]. Morita N., Mautz J. R., ve Kumagai N., Integral equation methods for electromagnetics. Artech House, Boston-London, 1990.

[12]. Harrington R. F., "Boundary Integral Formulations for Homogeneous Material Bodies," J. Electromagn. Waves Appl., cilt:3, no:1, s.1-15, 1989.

[13]. Huddleston P. L., Medgyesi-Mitschang L. N., ve Putnam J. M., "Combined Field Integral Equation Formulation for Scattering by Dielectrically Coated Conducting Bodies," IEEE Trans. Antennas Propag.,cilt:34, s:510-520, 1986.

[14]. Vinogradov S. S., Vinogradova E. D., Wilson C., Sharp I., ve Tuchkin Y. A., "Scattering of an E-polarized plane wave by two-dimensional airfoils," Electromagnetics, cilt. 29, no. 3, s. 268–282, 2009.

[15]. Colton D. ve Kress R., Integral Equation Methods in Scattering Theory. SIAM yayınları, Philedelphia, ABD, 2013.