

# Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Yarık Halka Rezonatörlerin Saçılma Parametrelerinin Hesaplanması

Hüseyin Gülbaş<sup>(1\*)</sup>, Özlem Özgün<sup>(2)</sup>, ve Mustafa Kuzuoğlu<sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> Orta Doğu Teknik Üniversitesi  
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, 06531 Ankara  
[e166166@metu.edu.tr](mailto:e166166@metu.edu.tr), [kuzuoglu@metu.edu.tr](mailto:kuzuoglu@metu.edu.tr)

<sup>(2)</sup> Hacettepe Üniversitesi  
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, 06800 Ankara  
[ozlem@ee.hacettepe.edu.tr](mailto:ozlem@ee.hacettepe.edu.tr)

**Özet:** Açık halka rezonatör yapılar, metamalzeme ortamların yapı taşlarından birisidir. Bu bildiriye, bir dalga kılavuzu içerisine yerleştirilmiş açık halka rezonatörün Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılarak modellenmesi ve saçılma parametrelerinin hesaplanması gerçekleştirilmiştir. Geliştirilen yöntem ve model, değişik rezonatör boyutları için test edilmiştir. Ayrıca, elde edilen test sonuçları, CST (Computer Simulation Technology) yazılımı sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

**Abstract:** Split ring resonators are the building blocks of metamaterials. In this study, a split ring resonator that is placed inside a waveguide is modeled by Finite Element Method, and its scattering parameters are computed. The model and the method are tested for different resonator dimensions. Moreover, the test results are compared with the results obtained by the CST (Computer Simulation Technology) simulation software.

## 1. Giriş

Metamalzemeler, son yıllarda birçok optik ve mikrodalga alanındaki uygulamaların ilgi odağı haline gelmiştir. Doğada bulunmayan elektromanyetik özellikleri ( $\epsilon$ -negatif ve/veya  $\mu$ -negatif özellikleri) sayesinde değişik işlevlere sahip elektromanyetik cihazların tasarlanmasına imkan sağladığı için, dalga kılavuzlarının minyatürleştirilmesi, anten tasarımı, filtre tasarımı gibi birçok alanlarda sıklıkla kullanılmaktadır. Yarık halka rezonatör yapılar sayesinde metamalzeme ortam elde etmek mümkündür [1]-[2]. Bu bildiriye, bir dalga kılavuzu içerisine yerleştirilmiş yarık halka rezonatör yapılar için Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) geliştirilmiş ve bu yapıların saçılma parametreleri (S parametreleri) hesaplanmıştır. Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) birçok mühendislik ve fizik dalındaki problemlerin modellenmesi ve analizinde kullanılan etkin bir sayısal yöntemdir [3]. SEY, ışıma, saçılma ve radar kesit alanı hesaplama gibi birçok elektromanyetik problemlerinde de etkin bir şekilde kullanılmaktadır [4]. Bu bildiriye, dalga kılavuzu ve kılavuz içine yerleştirilmiş rezonatör yapı, üç boyutlu dörtüzlü SEY elemanlarıyla modellenmiştir. Bu model sayesinde, yansıyan ve iletilen dalgalar hesaplanmış ve yapının saçılma parametreleri hesaplanmıştır. Farklı rezonatör yapıları için elde edilen sonuçlar, CST (Computer Simulation Technology) yazılımı sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

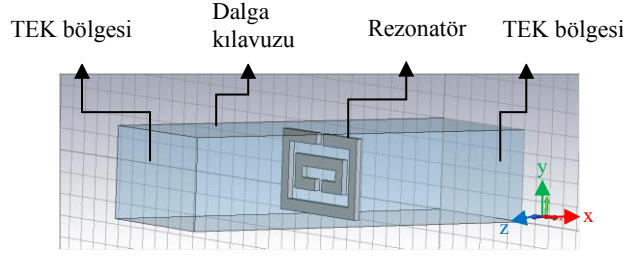
## 2. SEY ile Saçılım Parametrelerinin Hesaplanması

Dalga kılavuzu içine yerleştirilen iletken rezonatör yapı Şekil 1'de gösterilmiştir. Modelleme, rezonatörün elektrik alanının sadece TE<sub>10</sub> mod'da yayılması için tasarlanan dalga kılavuzunun içerisinde (enine boylamsal eksenlerinin ortasında) olacak şekilde yapılmıştır. Dalga kılavuzunun içi hava olacak şekilde tasarlanmış olup, açık sınırına üç boyutlu kapalı yapıyı ve yansıyan/iletilen dalganın uçlarda sönümlenmesini sağlayabilmek amacıyla Tamamen Eşleşmiş Katman (TEK) olarak adlandırılan sanal emici tabakalar dahil edilmiştir.

Dörtüzlü elemanlarla problemin ağı oluşturulduktan sonra SEY ile aşağıdaki denklemin çözümü yapılmıştır. Bu denkleme  $E^s$  saçılan elektrik alanı ifade etmektedir.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^s = k^2 \mathbf{E}^s \quad (1)$$

Problemin sınır koşulları dalga kılavuzu yüzeylerinde  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}^s = 0$  ve rezonatör yüzeylerinde  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}^s = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^g$  olarak belirlenmiş olup,  $\mathbf{E}^g$  gelen elektrik alanı ifade etmektedir.



Şekil 1. Dalga kılavuzu içerisindeki yarık halka rezonatör modeli

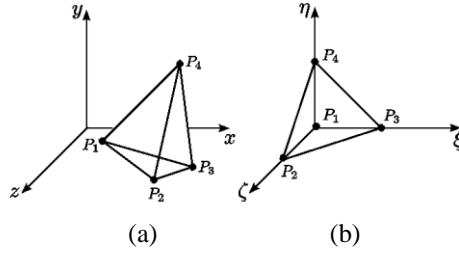
SEY yönteminde öncelikle (1)'de verilen dalga denkleminin ağırlık fonksiyonuyla iç çarpımı yapılır. Böylelikle denklemin zayıflatılmış formu elde edilir. Aşağıdaki denklemde  $\mathbf{W}$  ağırlık fonksiyonunu temsil etmektedir.

$$\int (\nabla \times \mathbf{E}^s) \cdot (\nabla \times \mathbf{W}) d\Omega - k^2 \int \mathbf{E}^s \cdot \mathbf{W} d\Omega = 0 \quad (2)$$

Hesaplama bölgesi Şekil 2(a)'da gösterilen dörtyüzlü elemanlarla modellenir. Eleman matrislerinin daha kolay hesaplanabilmesi için, Şekil 2(a)'daki dörtyüzlü eleman, Şekil 2(b)'deki master elemene dönüştürülür. Saçılan alan, bilinmeyen katsayılarla ağırlıklandırılmış SEY baz (şekil) fonksiyonlarının toplamı şeklinde ifade edilir. Saçılan elektrik alanın, bir elemanın altı kenarından her birisinde tanımlanan şekil fonksiyonları ( $\mathbf{N}_i$ ) ve elektrik alanın bu kenarlardaki teğet değerleri ( $E_i^e$ ) cinsinden tanımlanması aşağıdaki denklemde verilmiştir.  $\mathbf{N}_i$  her bir kenar için ayrı şekilde, orijinal ve dönüştürülmüş koordinat sistemleri ve kenarların uzunlukları kullanılarak hesaplanır.

$$\mathbf{E}^{s,e} = \sum_{i=1}^6 \mathbf{N}_i E_i^e \quad (3)$$

Denklem (3), (2) içerisindeki  $\mathbf{E}^s$  yerine koyulur. Galerkin yaklaşımını kullanarak, ağırlık fonksiyonları şekil fonksiyonlarına eşit seçilir ve integraller hesaplanarak 6x6 boyutundaki lokal eleman matrisleri ( $A_{ij}^e$ ) elde edilir. Elemanların birbirleriyle bağlantısına göre global matris sistemi elde edilir ve bu matris sistemi çözülerek saçılan alan değerleri elde edilir.



Şekil 2. Orijinal ve dönüştürülmüş koordinat sisteminde yer alan dörtyüzlü sonlu eleman

Şekil 1'de gösterilen modelde dalga kılavuzunun boyutları dalga boyu ( $\lambda$ ) cinsinden x, y ve z eksenleri üzerinde sırasıyla  $0.6\lambda$ ,  $0.4\lambda$  ve  $1.725\lambda$ 'dır (frekans 3GHz seçilmiştir). Dalga kılavuzunun dikdörtgen kesit boyutları olan  $0.6\lambda$  ve  $0.4\lambda$  uzunlukları, elektrik alanın  $TE_{10}$  mod'da yayılmasını sağlamaktadır. Dalga kılavuzunun iki ucunda  $0.4\lambda$  kalınlığında TEK bölge, merkezinde  $0.025\lambda$  kalınlığında rezonatör ve diğer bölgelerde hava bulunmaktadır. Elemanların kenar uzunluklarının  $0.025\lambda$  olduğu modelde, saçılma parametre hesaplamaları, rezonatörden z-ekseni boyunca belli bir mesafedeki yüzey üzerindeki alan değerleri kullanılarak yapılmaktadır. Bu yüzey, rezonatörden saçılan yüksek düzeyde modların yeterince sönümlenmesini sağlamak için yeterli (örneğin, rezonatörden en az  $0.05\lambda$ ) uzaklıkta ve TEK bölgesinin dışında olmalıdır.

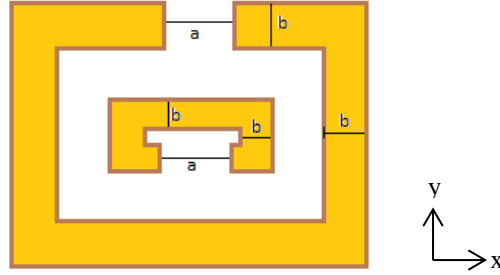
Saçılma parametreleri rezonatörün her iki tarafında belirlenen yüzeylerde aşağıdaki formüller uygulanarak bulunur. Yansıma katsayısı ( $S_{11}$  veya R), yapıyı uyarıcı dalganın geldiği yönde belirlenen yüzey üzerindeki saçılan elektrik alanlar kullanılarak hesaplanır. İletim katsayısı ise ( $S_{21}$  veya T), yapının diğer tarafında belirlenen yüzey üzerindeki toplam elektrik alanlar ( $\mathbf{E}^t = \mathbf{E}^s + \mathbf{E}^s$ ) kullanılarak hesaplanır.

$$S_{11} = \frac{|E^s|_{max}}{|E^g|_{max}} \quad (4)$$

$$S_{21} = \frac{|E^t|_{max}}{|E^g|_{max}} \quad (5)$$

### 3. Sayısal Sonuçlar

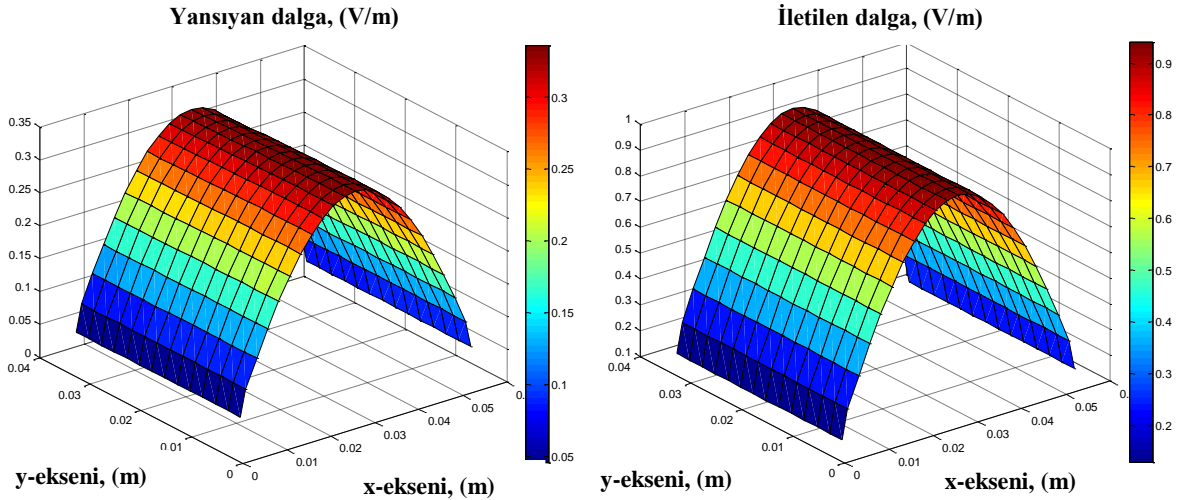
Bu bölümde, SEY ile elde edilen simülasyon sonuçları, CST ile karşılaştırılmalı olarak sunulmuştur. SEY yöntemi, MATLAB yazılımı ile programlanmıştır. Rezonatör boyutları dışarıdaki halka için  $0.55\lambda \times 0.35\lambda \times 0.025\lambda$ , içerideki halka için ise  $0.35\lambda \times 0.15\lambda \times 0.025\lambda$  olarak seçilmiştir. Şekil 3'te gösterilen rezonatör modelinde yarık uzunlukları (a)  $0.05\lambda$  (x eksenı boyunca) ve kenar kalınlıkları (b)  $0.05\lambda$ 'dır (x veya y eksenı boyunca). Modelde "a" ve "b" değıştirilerek testler yapılmış ve CST sonuçlarıyla Tablo 1'de karşılaştırılmıştır. Her iki yaklaşımla elde edilen veriler birbirleriyle örtüşmektedir. Ayrıca, z eksenı üzerinde seçilen yüzeyler üzerindeki  $TE_{10}$  mod'daki yansıyan ve iletilen dalgalar Şekil 4'te gösterilmektedir.



Şekil 3. Yarık halka rezonatörün x-y düzlemindeki görünüşü

Tablo 1. Şekil 1'de örnek rezonatör modeli için SEY ve CST ile elde edilen yansıma ve iletim katsayıları

| Boyut                                  | Yansıma Katsayısı (SEY) | İletim Katsayısı (SEY) | Yansıma Katsayısı (CST) | İletim Katsayısı (CST) |
|--|-------------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|
| a = $0.05\lambda$ , b = $0.05\lambda$  | 0.32                    | 0.94                   | 0.30                    | 0.95                   |
| a = $0.10\lambda$ , b = $0.05\lambda$  | 0.21                    | 0.98                   | 0.22                    | 0.97                   |
| a = $0.05\lambda$ , b = $0.025\lambda$ | 0.42                    | 0.90                   | 0.41                    | 0.91                   |



Şekil 4. Orijinden z eksenı boyunca  $0.45\lambda$  ve  $1.125\lambda$  uzaklıktaki yüzeyler için yansıyan ve iletilen dalgalar

### Kaynaklar

- [1]. Veselago V. G., "The Electrodynamics of Substances With Simultaneously Negative Values of  $\epsilon$  and  $\mu$ ," Soviet Physics Uspekhi, 10(4), s. 509-514, 1968.
- [2]. Shelby R., Smith D. R. ve Schultz S., "Experimental Verification of a Negative Index of Refraction," Science, 292(5514), s. 77-79, 2001.
- [3]. Jin, J.-M., The finite element method in electromagnetics. John Wiley & Sons, 2014.
- [4]. Özgün, Ö., "Finite Element Modeling of Electromagnetic Radiation/Scattering Problems by Domain Decomposition," Doktora tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, 2007.