

Meme ve Beyin Kesit Görüntülemesi İçin Termoakustik Dalga Denkleminin Dairesel Katmanlı Ortam Modeline Dayanan Ters Çözümü

Demet Elmas^{1,2}, Banu Uzun², Mithat İdemen³, Mustafa Karaman¹

¹İstanbul Teknik Üniversitesi
Elektronik ve Haberleşme Bölümü
İstanbul

dvurgunelmas@gmail.com, karamanmustafa@itu.edu.tr

²İşık Üniversitesi,
Matematik Bölümü
İstanbul
banu.uzun@isikun.edu.tr

³Okan Üniversitesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
İstanbul
midemen@gmail.com

Özet: Termoakustik görüntüleme homojen olmayan akustik dalga denkleminin ters çözümüne dayanmaktadır. Homojen ortam varsayımına dayanan serbest uzay çözümü görüntü çözünürlüğünde azalmaya ve geometrik bozulmalara neden olmaktadır. Bu çalışmada, meme ve beyin kesit görüntüleme uygulamaları için, iç içe dairesel yapıda katmanlı doku modeli kullanılarak termoakustik denklemin ters kaynak çözümü çıkarılmıştır. Elde edilen çözüm, katmanlı bölge içinde noktasal termoakustik kaynaklar içeren sayısal test fantomu ile nümerik olarak test edilmiştir.

Abstract: In thermoacoustic image reconstruction, solution of nonhomogeneous thermoacoustic wave equation with homogeneous medium assumption results in geometrical distortions and reduced image resolution. For cross-sectional thermoacoustic imaging of breast and brain, we derived an analytical solution of the wave equation using layered tissue model consisting of concentric annular layers on a cylindrical cross-section. We tested our solution with numerical simulations using a test phantom consisting of thermoacoustic point sources distributed in a layered structure.

1. Giriş

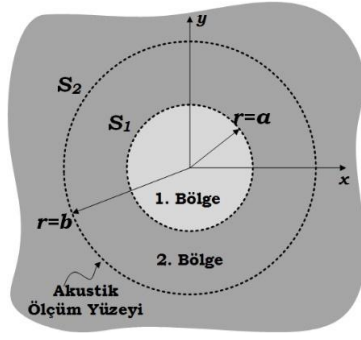
Mikrodalga uyarımlı termoakustik tomografi sisteminde, öncelikle görüntülenmek istenen doku mikrodalga ile uyarılır. Uyarılan doku ısınmaya, ısınma da dokuda termal genişlemeye yani titreşmeye sebep olur ve böylece doku akustik dalga kaynağı olarak davranır. Bu süreç, matematiksel olarak homojen olmayan termoakustik dalga denklemi ile ifade edilir:

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -p_0(\mathbf{r}) \cdot \delta'(t), \quad (1)$$

burada $p(\mathbf{r}, t)$ \mathbf{r} konumunda ve t zamanındaki akustik dalga fonksiyonu, c ortamdaki ses hızı ve $-p_0(\mathbf{r}) \cdot \delta'(t)$ ise kaynak fonksiyonudur. Ters kaynak probleminde, $p(\mathbf{r}, t)$ akustik fonksiyonu bilinen (ölçülmüş) alınarak, $p_0(\mathbf{r})$ kaynak fonksiyonunun belirlenmesi amaçlanmaktadır. Bu çalışmada, meme ve beyin kesit görüntüleme uygulamaları için, katmanlı doku modeli baz alınarak termoakustik dalga denkleminin sınır koşulları altında ters çözümü analitik olarak elde edilmiştir.

2. İki Katmanlı Ortam İçin Ters Kaynak Çözümü

Bu çalışmada, termoakustik dalga denkleminin katmanlı doku modeline dayalı ters çözümü için Şekil 1'de gösterilen R^2 uzayında farklı akustik özelliklere sahip gibi iki bölge esas alınmıştır. Orijin merkezli ve $r = a$ yarıçaplı S_1 sınır çemberi olmak üzere, bu çemberin iç bölgesi ve dış bölgesi sırası ile 1. Bölge ve 2. Bölge olsun. S_2 olarak adlandırılan $r = b$ yarıçaplı çembersel bir transduser olduğunu varsayalım.



$$\lim_{r \rightarrow a^-} p(r, t) = \lim_{r \rightarrow a^+} p(r, t),$$

$$\frac{1}{\rho_1} \lim_{r \rightarrow a^-} \frac{\partial}{\partial n_s} p(r, t) = \frac{1}{\rho_2} \lim_{r \rightarrow a^+} \frac{\partial}{\partial n_s} p(r, t)$$

ρ_1 : 1. Bölge'nin yoğunluğu

ρ_2 : 2. Bölge'nin yoğunluğu

n_s : S_1 yüzeyinin normali

Şekil 1: Katmanlı ortam modeli ve sınır koşulları

Bu çalışmanın amacı transduser tarafından çevrelenen (kapsanan) bölge içindeki akustik kaynak dağılımını bulmaktır. Görüntüleme alanındaki bütün kaynak noktalarından yayılan akustik dalgaların alınabilmesi için transduser ile yapılan ölçüm yeterince uzun süreli $(a/c_1 + (b-a)/c_2)$ yapılıır. Düz ve ters problem çözümünde, frekans uzayında ve polar koordinat sistemi esas alınarak problemin geometrisine uygun olan Bessel ve Hankel fonksiyonlarını içeren Green fonksiyonları çıkarılmıştır. Bu hesaplarda, radyasyon koşulları ile Şekil 1'de verilen süreklilik sınır koşulları kullanılmıştır. İçten-dışa yayılan Green fonksiyonu, kaynak $(\mathbf{r}_0 = (r_0, \varphi_0))$ ve gözlem $(\mathbf{r} = (r, \varphi))$ noktalarının bulunduğu bölgelere göre indekslenerek pozitif frekanslar (w) için şu şekilde elde edilmiştir:

$$G^{out}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, w) = \begin{cases} G_{11}^{out}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, w) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} (\mu_n J_n(k_2 r) + Y_n(k_2 r)) J_n(k_2 r_0) e^{-in(\varphi_0 - \varphi)} & r \in R_1, r_0 < r \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} (\mu_n J_n(k_2 r_0) + Y_n(k_2 r_0)) J_n(k_2 r) e^{-in(\varphi_0 - \varphi)} & r \in R_1, r < r_0 < a \end{cases} \\ G_{12}^{out}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, w) = \frac{2}{\pi \rho_1 a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} J_n(k_1 r) H_n^1(k_2 r_0) e^{-in(\varphi_0 - \varphi)} & r \in R_1, r_0 \in R_2 \\ G_{22}^{out}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, w) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} (\alpha_n J_n(k_2 r_0) + \gamma_n Y_n(k_2 r_0)) H_n^1(k_2 r) e^{-in(\varphi_0 - \varphi)} & r \in R_2, a < r_0 < r \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} (\alpha_n J_n(k_2 r) + \gamma_n Y_n(k_2 r)) H_n^1(k_2 r_0) e^{-in(\varphi_0 - \varphi)} & r \in R_2, r < r_0 \end{cases} \\ G_{21}^{out}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, w) = \frac{2}{\pi \rho_2 a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} H_n^1(k_2 r) J_n(k_1 r_0) e^{-in(\varphi_0 - \varphi)} & r \in R_2, r_0 \in R_1 \end{cases} \quad (2)$$

Burada, $k_1 = w/c_1$, $k_2 = w/c_2$, β_n düz problem çözümünde kullanılan katsayı matrislerinin determinanı, $\alpha_n = Re(\beta_n)$, $\gamma_n = Im(\beta_n)$ ve $\mu_n = \frac{k_2}{\rho_2} Y_n(k_1 a) H_n^{2'}(k_2 a) - \frac{k_1}{\rho_1} Y_n'(k_1 a) H_n^2(k_2 a)$ 'dir. Verilen bir kaynak dağılım fonksiyonunun ürettiği dalga dağılımını veren düz problem çözümü şu şekildedir:

$$P(\mathbf{r}, w) = \int_{V'} p_0(\mathbf{r}') G^{out}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dV' \quad (3)$$

Ters kaynak çözümünde zamana bağlı başlangıç değeri koşulu da kullanılarak, S_2 çemberi üzerinde transduser tarafından ölçülen akustik dalga $P(\mathbf{r}_s, w)$ olmak üzere, ortamdaki $p_0(\mathbf{r})$ kaynak dağılımı fonksiyonu şu şekilde çıkarılmıştır:

$$p_0(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_0} P(\mathbf{r}_s, w) \frac{1}{\rho(\mathbf{r}_s)} \frac{\partial G_{12}^{in}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)}{\partial n_s} dS dw & r \in R_1, \\ \rho(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_0} P(\mathbf{r}_s, w) \frac{1}{\rho(\mathbf{r}_s)} \frac{\partial G_{22}^{in}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)}{\partial n_s} dS dw & r \in R_2, \end{cases} \quad (4)$$

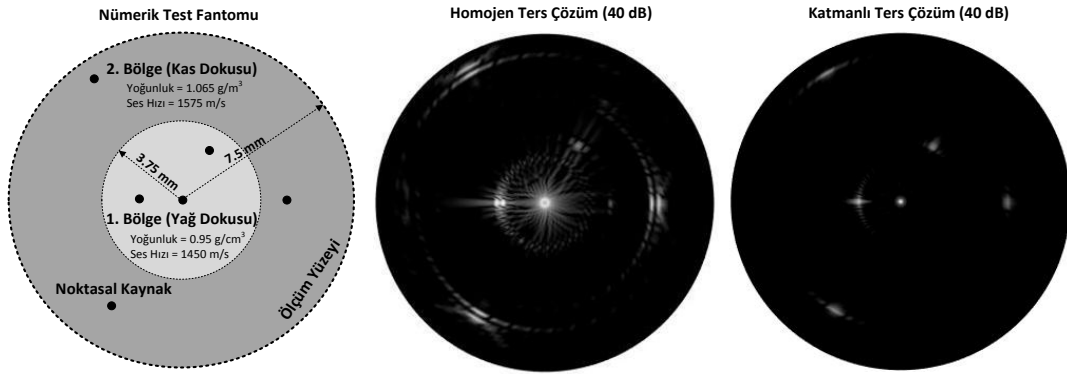
burada, G_{12}^{in} ve G_{22}^{in} fonksiyonları dıştan-içe yayılan Green fonksiyonları, $\rho(\mathbf{r})$ ise \mathbf{r} noktasının bulunduğu ortamın yoğunluğudur. Literatürde yer alan, homojen ortam varsayımına dayalı ters kaynak çözümü şu şekildedir [1]-[2]:

$$p_0(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{S_2} P(\mathbf{r}_s, w) \frac{\partial G_h^{in}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)}{\partial \mathbf{n}_s} dSdw, \quad G_h^{in}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \frac{i}{4} H_0^2(k_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|). \quad (5)$$

Burada, G_h^{in} içten-dışa yayılan homojen (serbest) ortam Green fonksiyonudur.

3. Nümerik Simülasyon

Katmanlı model için elde ettiğimiz çözümü test etmek ve literatürde var olan homojen ortam varsayımı esas alınarak bulunan çözüm ile mukayese etmek için sayısal test fantomu ile simülasyonlar gerçekleştirildi. Bu sayısal fantom, iki katmanlı olup her katman içinde noktasal kaynaklar bulunmaktadır (Şekil 2). İlk aşamada, termoakustik denklemin katmanlı ortam için bulunan düz problem çözümünü (3) kullanarak transduser yüzeyinde ölçülen akustik dalga ($P(\mathbf{r}_s, w)$) üretildi. Daha sonra bu veri ile homojen ters çözüm (5) ve katmanlı ters çözüm (4) kullanılarak, termoakustik kaynak dağılımı oluşturuldu. Homojen ters çözümde ortamın akustik dalga hızı yumuşak doku ortalaması olan 1540 m/s alındı. Şekil 2'de verilen simülasyon sonuçlarında, homojen ters çözümün noktasal kaynakların yerinde ortam parametrelerine bağlı olarak sapmaya sebep olduğu, geniş ana lob ve ciddi yan loblar içeren zayıf nokta dağılım fonksiyonu ürettiği; katmanlı ters çözümün ise noktasal kaynakların yerini doğru bulduğu, daha dar ana loba ve daha düşük yan loblara sahip nokta dağılım fonksiyonu ürettiği görülmektedir.



Şekil 2: Sayısal simülasyon sonuçları.

4. Sonuç

Bu çalışmada, iç içe dairesel yapıda katmanlı doku modelleri kullanılarak termoakustik denklemin ters kaynak çözümü silindirik koordinatlarda çıkarılmıştır. Elde edilen çözüm, iki katmanlı bir sayısal doku modelinde test edilmiştir. Burada sunulan katmanlı modele dayalı çözüm, silindirik ve küresel yapıdaki homojen olmayan doku yapılarının (meme ve beyin gibi) geometrik bozukluklardan arı ve kaliteli olarak kesit taramalı görüntülenmesi için uygun bir yaklaşımdır. Sunulan çözümün çok katmanlı ve üç boyutlu ortama genişletilmesi üzerine araştırma çalışmalarımız devam etmektedir.

Teşekkür: Bu çalışma, 213E038 nolu proje kapsamında TÜBİTAK tarafından desteklenmektedir.

Kaynaklar

- [1] Wang L.V. ve Yang X. "Universal Back-Projection Algorithm for Photoacoustic Computed Tomography", Physical Review E, 016706, 2005.
- [2] İdemem M. ve Alkumru A., "On an Inverse Source Problem Connected with Photo-Acoustic and Thermo-Acoustic Tomographies", Wave Motion, s. 595-604, 2012.
- [3] Schoonover R.W. ve Anastasio M.A. "Image Reconstruction in Photoacoustic Tomography Involving Layered Acoustic Media", J Opt Soc Am A Opt Image Sci Vis, 28(6): s. 1114-1120, 2011.
- [4] Wang L.V. and Wu H., "Biomedical Optics Principles and Imaging", Printed in the USA, 2007.