İki Boyutta Teğet Elektrik (TE) Durumda Elektrik Alan İntegral Denkleminin Çözümüne Üç Yaklaşım ve Analitik Regülerleştirilmeleri

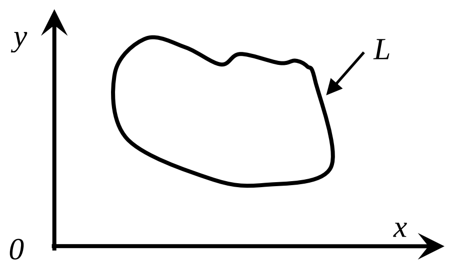
M. Enes Hatipoğlu, Olga A. Suvorova, Fatih Dikmen, Yury A. Tuchkin
Gebze Teknik Üniversitesi Üniversitesi
Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kocaeli
hatipogluenes@gmail.com, o.a.suvorova@gmail.com, dikmen@gtu.edu.tr, yury.tu@gmail.com

Özet: *Neumann sınır koşulları altında skaler iki boyutlu Helmholtz denklemine dair sınır integral denklemi, veya z yönünde homojen elektromanyetik alanların mükemmel iletken sınır üzerinde sağladığı, alanların x-y kesit düzlemine teğet elektrik (TE) yani sadece manyetik alanin z bileşeninin bulunduğu haldeki elektrik alan integral denklemi, iki boyutlu saçılma problemlerinin içinde en tekil integral denklem çekirdeğine sahip integral denklemdir. Kapalı bir eğri için bu denklemin çözümüne ilişkin üç yaklaşım tanıtılıp güçlü sayısal çözümleri için gereken analitik regülerleştirme yöntemi uygulaması tartışılacaktır.*

Abstract: *Boundary integral equation under Neumann boundary condition for scalar two dimensional Helmholtz equation, or the electric field integral equation in the case of homogenous electromagnetic fields along z direction, for transverse electric (TE) fields i.e. where only magnetic field has z component, is the integral equation with the most singular integral equation kernel among the two dimensional scattering problems. Two approaches regarding the solution of this equation for a closed contour will be introduced and application of the analytical regularization method for their rigorous numerical solution will be discussed.*

1. Giriş

İki boyutlu veya üç kartezyen koordinattan biri boyunca homojen fiziksel şartlarda, kapalı düzgün bir eğrinin (Şekil 1) temsil ettiği bir mükemmel iletken sınır dışına elektromanyetik dalgaların saçılması veya içinde kılavuzlanması problemlerine, homojen Helmholtz denkleminin Sommerfeld ışıma koşullarını sağlayan çözümlerini Green teoremleri yardımı ile integral gösterilimlere kavuşturup, sınırdaki integral denklemler aracılığı ile çözüm aranır [1-3]. Bu denklemler skaler denklemlerdir ve elektromanyetik alanlar söz konusu olduğunda elektrik/manyetik alan integral denklemlerinden (-E/M-AİD) kaynaklanır ve kılavuzlanan veya gelen dalganın polarizasyonuna göre çeşitlenirler. Örneğin z doğrultusunda homojen fiziksel şartlarda, z yönünde sadece elektrik/manyetik alan bileşenleri var ve manyetik/elektrik alana tüm bileşenler kesit, yani x-y düzlemine teğet ise bu durum teğet manyetik/elektrik (TM/TE) olarak adlandırılır. Böylece EAİD-TM, MAİD-TM, MAİD-TE, EAİD-TE olmak üzere dört skaler denklem ortaya çıkar. Yapılan sıralama rastgele değildir, ilgili integral denklem çekirdekleri bakımından basitten karmaşığa yapılmıştır [1]. Bu bildirinin konusu olan EAİD-TE, skaler Helmholtz denkleminin Sommerfeld ışıma koşulunu sağlayan çözümlerinin Neumann sınır koşulları altında yazılan integral denklemine denktir. Anılan denkleme ilişkin tekillik, sınırda Green fonksiyonunun iki normal türevi alınarak yazılmasına bağlı olarak, anılan dört tip denklemin en güçlüsüdür. Bu integral denklemin çözüme konu üç formülasyonu ve bunların kararlı sayısal çözümlerinin eldesi için yaklaşımlar sunumun konusu olacaklardır.



Şekil 1.Mükemmel elektriksel iletken düzgün kapalı eğrisel sınır.

2. EAİD-TE için üç gösterilim

Homojen Helmholtz denklemini sağlayan toplam skaler alanların integral gösterilimi L (Şekil 1) sınırında Neumann sınır koşulunu sağladığında, $u^0(\mathbf{q})$ dış bölgeden gelen alan ve $h\neq 0$ küçük bir sayı iken,

$$\lim_{h\to\infty}\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_q}\int_L \frac{\partial G(\mathbf{q}-h\mathbf{n}_q,\mathbf{p})}{\partial\mathbf{n}_p}Z(\mathbf{p})ds_p = -\frac{\partial u^0(\mathbf{q})}{\partial\mathbf{n}_q} \qquad \mathbf{q}\in L \tag{1}$$

biçimindedir [4]. Burada $u^0(\mathbf{q})$ elektromanyetik alanlar söz konusu olduğunda manyetik alan z bileşeni olur. (1) ifadesi x-y düzlemine teğet elektrik alan, sınır mükemmel iletken sınır koşulu uyarınca sınırda sıfır iken yazıldığında ortaya çıkan integral denklemdir ve [1]'de

$$\mathrm{FP}\int_L \frac{\partial^2 G(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial\mathbf{n}_q\partial\mathbf{n}_p}Z(\mathbf{p})ds_p = -\frac{\partial u^0(\mathbf{q})}{\partial\mathbf{n}_q} \qquad \mathbf{q}\in L \tag{2}$$

("FP" Hadamard manasında sonlu parça (finite part) anlamında) olmak üzere yer almıştır. (1) ve (2) eşdeğerdir ve konu edilecek yaklaşımlardan ilkidir. Tekilliği logaritmik olan ve yukarıdaki her iki denklemde de hem gözlem hem de kaynak noktalarına göre normal yönde türevlenmiş olan $G(\mathbf{q},\mathbf{p}) = -(i/4)H_0^{(1)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{p}|)$ (Homojen Helmholtz denklemininin iki boyutta Green fonksiyonu), anılan her iki noktadaki teğet yöndeki türevleri ile toplandığında, gözlem ve kaynak noktalarındaki normal vektörlerinin skaler çarpımı ile ölçeklenmiş bir fonksiyona dönüşmektedir [1]:

$$\frac{\partial^2 G(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial\mathbf{n}_q\partial\mathbf{n}_p}+\frac{\partial^2 G(\mathbf{q},\mathbf{p})}{\partial\mathbf{l}_q\partial\mathbf{l}_p} = k^2 G(\mathbf{q},\mathbf{p})\left[\mathbf{n}_q\cdot\mathbf{n}_p\right] \tag{3}$$

Bu özdeşliğin (1) ya da (2) denklemlerinde kullanılması ile konu edilecek yaklaşımlardan ikincisine varılır:

$$\mathrm{FP}\int_L \left\{k^2\left[\mathbf{n}_q\cdot\mathbf{n}_p\right]-\frac{\partial^2}{\partial\mathbf{l}_q\partial\mathbf{l}_p}\right\}G(\mathbf{q},\mathbf{p})Z(\mathbf{p})ds_p = -\frac{\partial u^0(\mathbf{q})}{\partial\mathbf{n}_q}, \qquad \mathbf{q}\in L \tag{4}$$

Diğer taraftan, [1]'de de ayrıntılı biçimde verilen vektör Green özdeşlikleri aracılığı ile yazılabilecek üçüncü integral denklem yaklaşımının da kullanılışına rastlayabiliriz [4]:

$$\mathrm{PV}\int_L \left\{k^2 Z(\mathbf{p})\left[\mathbf{n}_q\cdot\mathbf{n}_p\right]+\frac{\partial Z(\mathbf{p})}{\partial\mathbf{l}_p}\frac{\partial}{\partial\mathbf{l}_q}\right\}G(\mathbf{q},\mathbf{p})ds_p = -\frac{\partial u^0(\mathbf{q})}{\partial\mathbf{n}_q}, \qquad \mathbf{q}\in L \tag{5}$$

Burada PV (principle value – asal değer) kısaltmasıdır ve integralin asal değer manasında yazıldığını belirtir.
Kapalı düzgün bir eğriden (L-Şekil 1)

3. Analitik Regülerleştirme

Yukarıda anılan denklemlerin üçü de esasen Fredholm 1. tip integral denklemlerdir ve sayısal olarak çözülmeleri sırasında da sonsuz boyutlu 1. türden lineer denklem sistemleri olarak ayrıklaşırlar:

$$\mathbf{A}x=b, \qquad x,b\in l_2 \tag{6}$$

Bu türden denklemlerin çözümlerinin bilgisayarda gerçekleştirilmesi ise ancak sonlu boyutta mümkündür ve yuvarlatma hataları çözümün doğruluğunu tehdit eder [2, 7]. Analitik regülerleştirme [2-6] şu yeni tanımlar uyarınca uygulanır ise

$$x=\mathbf{R}y; \quad b=\mathbf{L}g; \quad \mathbf{LAR}=\mathbf{I}+\mathbf{H}; \tag{7}$$

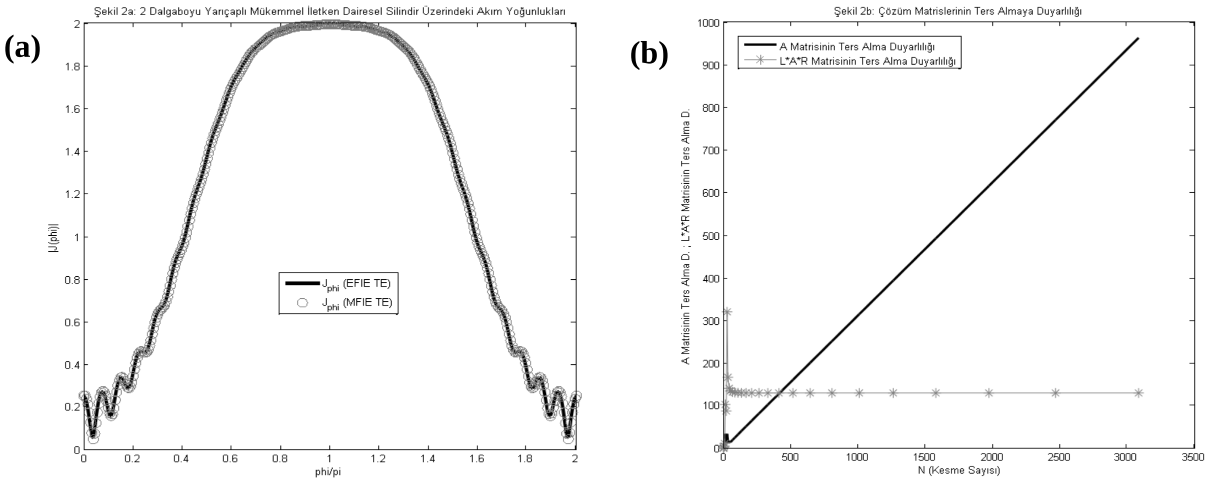
(6) denklemi 2. türden bir lineer denklem sistemine indirgenebilir (**I**: birim operator, **H**: l_2 uzayında kompakt operator):

$$(\mathbf{I}+\mathbf{H})y=g, \qquad y,g\in l_2 \qquad (8)$$

Yeni sonsuz boyuttaki sistemin sonlu bir boyuta kesilmesi ile oluşan sistem yuvarlatma hatalarına bağışık olarak, tersi alınmasına duyarlılığı kesme sayısı arttıkça düzgün sınırlı kalan bir matris verir. Bununla elde olunan çözümler de nümerik olarak kararlı bir matris ters alma işlemi sonucunda baştaki fiziksel problemin gereklerine uygun matematiksel olarak güçlü bir çözüm üretir.

4. Sayısal Sonuçlar ve Hedef

Ele alınan güçlü tekillikli sınır değer problemine dair üç integral gösteriliminin sayısal çözüm için ayrıklaştırılmaları sırasındaki güçlüklerin incelenmesi ve analitik regülerleştirme öncesindeki ve sonrasındaki sonlu boyuta kesilmiş hallerinin çözümün verimi bakımından karşılaştırılmaları yapılacaktır. Şekil 2a'da, 2 dalgaboyu yarıçaplı bir mükemmel iletken dairesel silindir için TE kutuplu elektrik alan integral denklemi ile bulunan akım yoğunluğunun, aynı durum için manyetik alan integral denklemi[1] ile elde edilmiş sonuç ile mükemmel uyumu sunulmaktadır. Aynı şekilde Şekil 2b'de ise bu çalışmada kullanılan birinci ve ikinci türden matrislerin terslerinin alınmaya duyarlılıkları bakımından beklenen karakteristikleri sergilenmiştir. Buna ek olarak her üç gösterilimin de analitik regülerleştirilebilmelerine farklı yaklaşımların gerekip gerekmediğinin de incelenip karşılaştırılmaları bu bildiriye konu çalışmanın sunumunda verilmek istenen önemli bir hedefidir.



Şekil 2: (a) 2 Dalgaboyu Yarıçaplı Mükemmel İletken Dairesel Silindir Üzerindeki Akım Yoğunlukları; **(b)** Çözüm Matrislerinin Ters Almaya Duyarlılığı

Alınan Destekler

Bu çalışma TÜBİTAK 114E927 numaralı araştırma projesince desteklenmektedir.

Kaynaklar

[1]. Morita, N., Kumagai, N., Mautz, J.R., Integral Equation Methods for Electromagnetics, Artech House, Boston, 1990
[2]. Poyedinchuk A.Ye., Tuchkin Yu. A., Shestopalov V. P. "New Numerical-Analytical Methods in Diffraction Theory", Mathematical and Computer Modeling, Vol.32, p.1029-1046, 2000
[3]. Shestopalov V.P., Tuchkin Yu.A., Poyedinchuk A.Ye., Sirenko Yu.K., Novel methods for solving direct and inverse problems of diffraction theory, vol.1, Kharkov, Basımevi: Osnova, 1997. (Rusça)
[4]. Dikmen F., Suvorova O.A., Tuchkin Y. A., "Modeling of the Hollow Waveguides by Analytical Regularization: TE Modes." General Assembly and Scientific Symposium, 2011 XXXth URSI, İstanbul 13-20 Aug. 2011
[5]. Oğuzer, T. A., Nosich A. I., Altıntaş, A., "Analysis of an Arbitrary Conic Section Profile Cylindrical Reflector Antenna, H-Polarization Case" IEEE Trans. Ant.&Propag., vol. 52, no. 11, 3156 November 2004.
[6]. Tuchkin Yu.A., "Wave scattering by an open cylindrical screens of arbitrary profiles with the Neumann boundary value conditions", Soviet Physics Doclady, 32, p.213-216, 1987.
[7]. Wilkinson J.H.. The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, Oxford, 1965.