Zamanda Adımlama Yöntemi Tabanlı Zaman Uzayı İntegral Denklem Çözücülerin Zamana Göre Ön-Koşullanması

Hüseyin Arda Ülkü
Gebze Teknik Üniversitesi
Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kocaeli
haulku@gtu.edu.tr

Özet: *Zaman uzayı integral denklemlerin çözümü için kullanılan zamanda adımlama yönteminin (ZAY'ın) kararlılığını arttırmak için zamana göre ön-koşullama kavramı önerilmiştir. Zamana göre ön-koşullama ZAY matris sisteminin sağdan ve soldan zamanda azalan üstel fonksiyonlar kullanılmasıyla elde edilmiştir. Önerilen yöntem mükemmel elektriksel iletken saçıcıların incelenmesine uygulanmış ve ön-koşullamanın hem ZAY matris sistemini hem de çözümü daha kararlı hale getirdiği gösterilmiştir.*

Abstract: *A temporal preconditioning scheme that stabilizes marching on-in-time (MOT) solution of time domain integral equations is proposed. The temporal preconditioner uses exponentially decaying functions in time as right and left preconditioners. The proposed scheme is applied to analysis of scattering from perfect electrically conducting objects. It is shown that the temporal preconditioner stabilizes the MOT system and the solution.*

1. Giriş

Zaman uzayı integral denklemlerinin (ZUİD'lerin) zamanda adımlama yöntemi (ZAY) ile çözümlerinde kararsızlık problemi ile sıklıkla karşılaşılmaktadır. ZAY'ın kararsızlık problemini iyileştirmek için birçok yöntem geliştirilmiştir (örneğin [1]-[6]). ZUİD'lerin ZAY çözümlerinde görülen problemlerden biri çözümün lineer artan ve sabit bileşenler içermesidir. Bu problemin başlangıç koşullarının tam olarak uygulanmamasından kaynaklandığı öngörülmektedir [7]. Lineer artan ve sabit bileşenlerin giderilmesi için [7]'de bir yöntem önerilmiştir. Önerilen yöntemde ZUİD'in formülasyonu sırasında bir ara değişken tanımlanarak ve ilgili denklemin zamana göre integrali çözülerek belirtilen bileşenlerin giderilmesi sağlanmıştır. Çözümde lineer artan ve sabit bileşenlerin giderilmesine rağmen ZAY matris sisteminin doğrudan çözümü olan ara değişkende halen görülmektedir. Bu bileşenler gerek standart gerekse [7]'de önerilen ZAY çözümünü özellikle çok zaman adımı gerektiği durumlarda bozabilmektedirler.

Bu çalışmada ara değişkenin içerdiği lineer artan ve sabit bileşenlerin ZAY matris sistemini bozmasını engellemek için zamana göre ön-koşullama önerilmiş ve mükemmel elektriksel iletken saçıcıların analizine uygulanmıştır. Özel olarak zamana göre azalan üstel (exponential) fonksiyonlar sağ ve sol ön-koşullayıcı olarak kullanılmıştır. Zamana göre ön-koşullama sonucu ZAY matris sisteminin ve çözümün (ara değişkenin) daha kararlı hale geldiği gösterilmiştir.

2. Formülasyon

ZAY matris sistemi, Δt zaman adım büyüklüğü olmak üzere, $t = j\Delta t$ zaman anında (j zaman adımında)

$$\mathbf{V}_j = \sum_{i=\max\{1,j-N_g\}}^{j} \mathbf{Z}_{j-i}\mathbf{I}_i \tag{1}$$

olarak verilir [8]. Burada $\mathbf{V}_j$ test fonksiyonları ile j zaman adımında test edilmiş kaynakları, $\mathbf{Z}_{j-i}$ ZAY etkileşim matrisini ve $\mathbf{I}_i$ ise i zaman adımındaki bilinmeyen katsayıları belirtmektedir. N_g ise maksimum etkileşim aralığını tanımlar.

ZAY matris sisteminde yer alan bilinmeyen katsayılar, σ zayıflama katsayısı olmak üzere, zamana göre üstel azalan fonksiyon ile çarpılabilir: $\tilde{\mathbf{I}}_i = \exp[-\sigma t_i]\mathbf{I}_i = \exp[-\sigma i\Delta t]\mathbf{I}_i$. $\tilde{\mathbf{I}}_i$ zamana göre üstel olarak azalacağından çözümün daha kararlı olması sağlanır ve bu işlem sağ ön-koşullama olarak adlandırılabilir. Sağ ön-koşullama

(1)'deki ZAY matrisine $\exp[\sigma i\Delta t]$ olarak etki edecektir. Bu etkinin giderilmesi için (1) denklemi $\exp[-\sigma t_j] = \exp[-\sigma j\Delta t]$ ile çarpılarak çözülmesi gereken matris sisteminin sınırlı kalması sağlanabilir. Bu işlem ise sol ön-koşullama olarak adlandırılabilir. Sonuçta oluşacak zamana göre ön-koşullanmış ZAY matris sistemi aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{\mathbf{V}}_j = \exp[-\sigma j\Delta t]\mathbf{V}_j = \sum_{i=\max\{1,j-N_g\}}^{j} \exp[-\sigma(j-i)\Delta t]\mathbf{Z}_{j-i}\tilde{\mathbf{I}}_i = \sum_{i=\max\{1,j-N_g\}}^{j} \tilde{\mathbf{Z}}_{j-i}\tilde{\mathbf{I}}_i \qquad (2)$$

Tanımlanan matris elemanları incelendiğinde, $j \geq i > 0$ olduğundan, $\tilde{\mathbf{V}}_j$ ve $\tilde{\mathbf{Z}}_{j-i}$'nin matris elemanları zamanla üstel olarak azalır ve $\tilde{\mathbf{Z}}_{j-i}$ oluşacak sistemin öz-değerleri kararlı bölgeye doğru hareket eder.

Zamana göre ön-koşullanmış ZAY sistemi ($\tilde{\mathbf{Z}}_{j-i}$) ve sitemin çözümü ($\tilde{\mathbf{I}}_i$) kararlı olmasına karşın ön-koşullanmamış (1) denkleminde aranan çözüm ($\mathbf{I}_i$) kararlı olmayabilir. Bu sebeple önerilen zamana göre ön-koşullama artçıl işlem gerektiren ikinci bir yöntem ile birleştirilmesi etkinliğini arttıracaktır. Örneğin, (2) denkleminin çözümü ile elde edilen sonuç filtrelendikten sonra istenen çözüm elde edilebilir. Bu çalışmada özellikle lineer ve sabit bileşenleri gidermek için [7]'de önerilen yöntemde ara değişkenin elde edilmesi sırasında zamana göre ön-koşullama uygulanmıştır ve artçıl işlem olarak [7]'de belirtildiği gibi lineer ve sabit bileşenler içermeyen çözümün elde edilmesi gerçeklenmiştir.

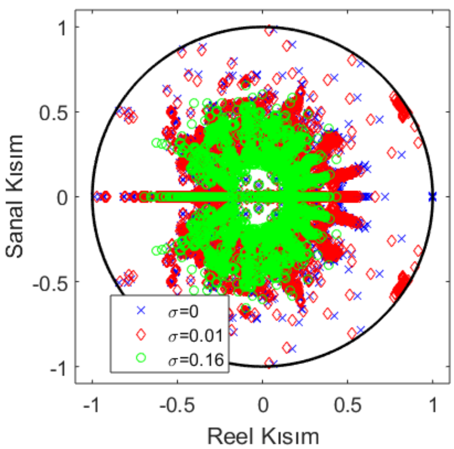
3. Nümerik Sonuçlar

Bu bölümde önerilen zamana göre ön-koşullamanın etkinliği [7]'de verilen zaman uzayı elektrik alan integral denkleminin (ZU-EAİD'in) ikinci mertebeden formülasyonuna uygulanarak gösterilmiştir. Nümerik örnekte 2430 Rao-Wilton-Glisson [9] uzaya göre temel fonksiyon ile modellenmiş mükemmel elektriksel iletken birim küreden saçılma analiz edilmiştir. Zamana göre temel fonksiyon olarak 3. dereceden Lagrange interpolasyon fonksiyonları [10] kullanılmıştır. ZAY matris elemanları [1]-[3]'te anlatıldığı gibi yarı analitik formüller kullanılarak belirlenmiştir. Birim küre zaman bağımlılığı modüle edilmiş Gauss işareti olan ve elektrik alan bileşeni

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{x}}\cos[2\pi f_0(t-t_0+\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{z}}/c_0)]\exp[(t-t_0+\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{z}}/c_0)^2/2\gamma^2] \qquad (3)$$

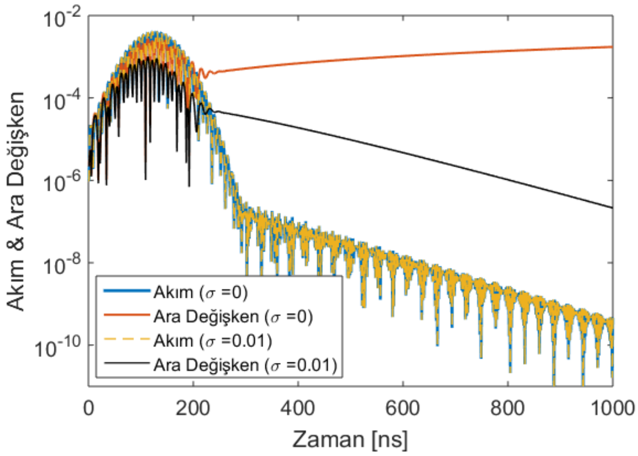
olarak verilen düzlemsel dalga ile aydınlatılmıştır. (3) denkleminde modülasyon frekansı $f_0 = 60$ MHz, etkin band genişliği $f_{\text{bg}} = 30$ MHz, etkin zaman genişliği $\gamma = 7/(2\pi f_{\text{bg}})$, zamandaki gecikme $t_0 = 3.5\gamma$ ve c_0 dalganın ortamdaki yayılma hızıdır. Zaman adımı büyüklüğü $\Delta t = 1.11$ ns'dir.

Şekil 1'de ZU-EAİD'in ikinci mertebeden formülasyonunun [7] ZAY sistemine ait öz-değerleri [11] farklı zayıflama sabitleri ($\sigma = \{0, 0.01, 0.16\}$) için verilmiştir. Görüldüğü üzere zayıflama sabiti arttıkça ZAY sisteminin öz-değerleri birim çemberin merkezine doğru hareket etmektedir. Özellikle lineer ve sabit bileşenlerin oluşmasına sebep olan ve birim çemberin üzerinde $z = 1$ civarındaki öz-değerler $\sigma > 0$ için birim çemberin içine doğru hareket etmişlerdir. Böylece zamana göre ön-koşullama ZAY matris sisteminin kararlılığını arttırmıştır.



Şekil 1. ZAY matris sisteminin öz-değerleri.

Şekil 2'de aynı problem için zamana göre ön-koşullanmış ($\sigma = 0.01$) ve ön-koşullanmamış ($\sigma = 0$) ZAY sisteminin çözümleri sonucu elde edilmiş akım yoğunluğu katsayıları ve ilgili ara değişkenler verilmiştir. Ara değişkenler c_0^{-2} ile normalize edilmiştir. Şekil 2'den görüldüğü gibi ön-koşullanmamış sistemin doğrudan çözümü olan ara değişken lineer artan ve sabit bileşenler içerirken ön-koşullanmış sistemin doğrudan çözümü olan ara değişken zamanla zayıflamaktadır.



Şekil 2. Ön-koşullanmış ve ön-koşullanmamış ZAY matris sistemlerinin çözümü.

4. Sonuçlar

ZAY tabanlı ZUİD çözücüler için zamana göre ön-koşullama kavramı ortaya atılmıştır. Zamana göre ön-koşullamanın ZAY matris sisteminin ve çözümün kararlılığına etkisi incelenmiş ve etkinliği gösterilmiştir. Önerilen yöntem matris elemanlarının belirlenmesinden bağımsız, ZAY algoritmasını değiştirmeden sadece zamanda adımlama kısmına uygulanmaktadır ve tüm ZAY tabanlı ZUİD çözücülere uygulanabilir.

Kaynaklar

[1]. Ülkü H. A. ve Ergin A. A., "Analytical evaluation of transient magnetic fields due to RWG current bases," IEEE Trans. Antennas Propag., cilt. 55, no. 12, s. 3565–3575, 2007.
[2]. Ülkü H. A. ve Ergin A. A., "Application of analytical retarded-time potential expressions to the solution of time domain integral equations," IEEE Trans. Antennas Propag., cilt. 59, no. 11, s. 4123–4131, 2011.
[3]. Ülkü H. A. ve Ergin A. A., "On the singularity of the closed-form expression of the magnetic field in time domain," IEEE Trans. Antennas Propag., cilt. 59, no. 2, s. 691–694, 2011.
[4].Weile, D. S., Pisharody, G., Chen N.-W., Shanker B., ve Michielssen E., "A novel scheme for the solution of the time-domain integral equations of electromagnetics," IEEE Trans. Antennas Propag., cilt. 52, no.1, s. 283–295, 2004.
[5]. Shi Y., Xia M.-Y., Chen R.-S., Michielssen E., ve Lu M., "Stable electric field TDIE solvers via quasi-exact evaluation of MOT matrix elements," IEEE Trans. Antennas Propag., cilt. 59, no. 2, s. 574–585, 2011.
[6]. Beghein Y., Cools K., Bagci H., ve De Zutter D., "A space-time mixed Galerkin marching-on-in-time scheme for the time-domain combined field integral equation," IEEE Trans. Antennas Propag., cilt. 61, no.3, s. 1228–1238, 2013.
[7]. Ülkü H. A. ve Ergin A. A., "Solution of the initial condition problem of the time-domain EFIE," Computational Electromagnetics Workshop (CEM), s. 17–18, Ağustos 2013.
[8]. Shanker B., Ergin A. A., Aygun K., ve Michielssen E., "Analysis of transient electromagnetic scattering from closed surfaces using a combined field integral equation," IEEE Trans. Antennas Propag., cilt. 48, no. 7, s. 1064–1074, 2000.
[9]. Rao S., Wilton D., ve Glisson A., "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape," IEEE Trans. Antennas Propag., cilt. 30, no.5, s. 409–418, 1982.
[10] Aygun K., Shanker B., Ergin A. A., ve Michielssen E., "A twolevel plane wave time-domain algorithm for fast analysis of EMC/EMI problems," IEEE Trans. Electromagn. Compat., cilt. 44, no. 2, s. 152–164, 2002.
[11] Walker S. P., Bluck M. J., ve Chatzis I., "The stability of integral equation time-domain scattering computations for three-dimensional scattering; similarities and differences between electrodynamic and elastodynamic computations," Int. J. Numer. Model.: Electron. Networks, Device Fields, cilt. 15, no. 5-6, s. 459–474, 2002.