Sonlu Sayıda Keyfi Kesitli Mükemmel İletken Sınırdan Elektromagnetik Dalgaların Saçılması

Olga Suvorova, Yury A. Tuchkin, Fatih Dikmen
Gebze Teknik Üniversitesi Üniversitesi
Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kocaeli
o.a.suvorova@gmail.com, yury.tu@gmail.com, dikmen@gtu.edu.tr

Özet: *İki boyutta teğet manyetik durumda Fredholm birinci tip bir integral denklemi olarak yazılabilen elektrik alan integral denkleminin anılan durumdaki sınır koşulları altında çözümü konu edilmektedir. Düzgün eğrilerden oluşan sonlu sayıdaki mükemmel iletken cisim ve ilgili sınır koşulu için bu denklemin çözümü tüm bölge Galerkin yöntemi temelinde işlenecek ve kararlı sayısal çözümleri için gereken analitik regülerleştirme uygulamaları sunulacaktır.*

Abstract: *In two dimensional transverse magnetic case, emerging as an integral equation of the Fredholm's first kind, the electric field integral equation's solutions under corresponding boundary condition is under consideration. With a set of smooth contours and corresponding boundary conditions, solution of this equation will be elaborated on the basis of entire domain Galerkin procedure and analytical regularization method for their stable numerical solution will be presented.*

1. Giriş

İki boyutta periyodik, ızgara biçimli, ve hatta kristal yapılar oluşturabilecek fiziksel yapıların oluşturduğu sonlu sayıda eğrilerden oluşan periyodik cisimlerden elektromanyetik saçılmanın yüksek doğrulukla benzetimi için geliştirilmiş ve matematiksel olarak güçlü biçimde formüle edilmiş [1-3] Analitik Regülerleştirme Yöntemi (ARY) uyarlaması bu çalışmada konu edilmektedir. Momentler ve sonlu farklar benzeri yöntemler ile birinci türden bir fonksiyonal denkleme indirgenen kırınım sınır değer problemine ilişkin denklemlerin bu yöntemler ile elde edilen çözümleri sayısal olarak kararsızlık barındırır. ARY bu türden bir problem ikinci türden bir denklem sistemine indirgemektedir. Bu sistemin eldesi teknik olarak, herhangi bir problem söz konusu olduğunda daha güç de olsa, yukarıda anılan sayısal kararsızlıklardan bağımsızdır.

2. Teori

M adet mükemmel iletken sonsuz ince ve Oz ekseni boyunca sonsuz uzun eğriden oluşan sınır sistemi verilmiş olsun. Oxy düzleminde bu eğrilerin kesitleri L_j, j=1,2,..,M ile gösterilen basit bağımlı eğrilerin kümesi olarak gösterilebilir. Bu eğrilerin gösterdiği sınırlar z yönünde sabit $u^0(x,y)$ genlikli dalga ile aydınlatılmış olsun. Bu noktadan itibaren zaman bağımlılığını $e^{-i\omega t}$ aldığımızı belirtelim. Bu şartlar altında saçılan alan $u^s(x,y)$ ile gösterilir. Sınırın her noktasında ve eğrinin iki yanında şu sınır koşulları sağlanmalıdır:

$$\left[u^s + u^0\right]_{(x,y)\in L_j} = 0,\ j = 1,2,\ldots,M \tag{1}$$

Buna göre, u^0 bilinen fonksiyon, bilinmeyeni Helmholtz denklemini sağlayan tek tabaka potansiyeli olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\int_L H_0^{(1)}(k\left|p-q\right|)z(q)ds_q = -u^0(p),\ p\in L, L\equiv\bigcup_{j=1}^{M} L_j \tag{2}$$

Burada $|p\text{-}q|$ Oxy düzlemindeki p ve q noktaları, ds_q L üzerinde yay uzunluğu diferansiyeli, $H_0^{(1)}(z)$ birinci tür Hankel fonksiyonudur. (2) yeniden şöyle yazılabilir:

$$\sum_{j=1}^{M}\int_{L_j} H_0^{(1)}(k\left|p-q\right|)z_j(q)ds_q = G_s^0(p),\ p\in L_s, s=1,2,...M \tag{3}$$

Burada, $z_j(q)=z(q)|_{q\in Lj}$ $j=1,2,\ldots,M$ olarak yer alır. Böylece saçılma problemi çözümünü aramak istediğimiz integral denklem sistemine indirgenir. Varsayalım ki her L_j sınırı, kapalı kendini kesmeyen S_j eğrisi ile gösterilebilir:

$$\exists R_0 : \forall j \neq k, R(S_{j,}S_k) \geq R_0 > 0,\ j,k=1,2,...,M \tag{4}$$

Burada $R(S_j,S_k)$ S_j, S_k eğrileri arasındaki uzaklıktır. Her S_j eğrisi topolojik olarak birim çembere denk olduğundan, genelliği kaybetmeden, birim çember üzerinde bir noktaya göre iki düzgün fonksiyon $x_j(\theta)$, $y_j(\theta)$, $\theta\in[-\pi,\pi]$ verilebilir. Bu fonksiyonlar her S_j eğrisi üzerindeki her noktayı birim çember üzerindeki bir nokta ile parametrize edebilir, yani $(x_j(\theta),y_j(\theta))$ fonksiyonları S_j eğrisi üzerinde θ, $-\pi$ değerinden π değerine değişirken bu değerlere bire bir karşı gelen sürekli olarak ve tek biçimli gezen değerler verirler. Bu parametrizasyonun fonksiyonları ve (3) denklemi birleştirilecek olursa, aşağıdaki denkleme varılır:

$$\sum_{j=1}^{M}\int_{L_j} H_0^{(1)}(kR_{sj}(\theta_p,\theta_q))Z_j(\theta_q)d\theta_q = G_s(\theta_p),\ \theta_p\in(-d_s d_s), s=1,2,...M \tag{5}$$

Burada $R_{sj}(\theta,\tau)=\{[x_s(\theta)-x_j(\tau)]^2+[y_s(\theta)-y_j(\tau)]^2\}^{1/2}$ ve $Z_j(\theta_q)$ ve $G_s(\theta_p)$ (3)'de karşılıkları olan fonksiyonlardır. Bilinmeyen fonksiyon $z_j^0(\tau)$, $\tau\in[-\pi,\pi]$ şöyle de tanımlanabilir:

$$z_j^0(\tau)=\left\{\begin{matrix} z_j(\tau),\ \tau\in(-d_{j,}d_j) \\ 0, \tau\in\left[-\pi,\pi\right]\backslash[-d_{j,}d_j] \end{matrix}\right\}, j=1,2,...,M \tag{6}$$

(5) ve (6) aracılığıyla $z_j^0(\tau)$'nin şu denklem kümesini sağladığı ortaya çıkar:

$$\sum_{j=1}^{M}\int_{-\pi}^{\pi} H_0^{(1)}(kR_{sj}(\theta,\tau)z_j^0(\tau)d\tau = G_s(\theta),\ \theta_p\in(-d_s d_s), s=1,2,...M \tag{7}$$

$H_{sj}(\theta,\tau)$ düzgün fonksiyonları standart biçimde tanımlanır [1,3]:

$$H_{sj}(\theta,\tau) = -i\frac{\pi}{2}H_0^{(1)}(kR_{sj}(\theta,\tau)) - \delta_{sj}\ln\left|2\sin\frac{\theta-\tau}{2}\right| \tag{8}$$

Burada δ_{sj} Kronecker delta fonksiyonudur. Bu fonksiyonun iki katlı Fourier serisi

$$H_{sj}(\theta,\tau) = \sum_{p,q=-\infty}^{\infty}\sum h_{pq}^{sj}\,\mathrm{e}^{(i(p\theta+q\tau))}, \theta,\tau\in[-\pi,\pi]. \tag{9}$$

olarak kolayca verilebilir. Bilinmeyen $z_j^0(\tau)$ da Fourier serisi olarak aranırsa şu biçimde yazılmalıdır:

$$z_j^0\ (\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n^j\,\mathrm{e}^{(in\tau)}, \tau\in\left[-\pi,\pi\right], j=1,2,...,M \tag{10}$$

(8-10) arası ifadeleri (7)'de yerine yazarsak [1-2] daki gibi aşağıdaki biçimdeki denklem sistemine varırız:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}^{'}\left|n\right|^{-1} z_n^s\,\mathrm{e}^{(in\theta)} - 2\sum_{j=1}^{M}\sum_{n,p=-\infty}^{\infty}\sum z_n^j h_p^{sj}\,\mathrm{e}^{(ip\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n^s\,\mathrm{e}^{(in\theta)}, \theta\in(-d_s,d_s); \\ &\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n^s\,\mathrm{e}^{(in\theta)} = 0;\ \theta\in[-\pi,\pi]\backslash[-d_s,d_s], s=1,2,...,M \end{aligned} \tag{11}$$

`$|n|$ ifadesindeki sol üst işaret ilk toplamda n=0 teriminin ihmal edildiği anlamına gelir ve $\{g_n^s\}_{n=-\infty}^{\infty}$ (i/2) $G_s(\theta)$ fonksiyonunun Fourier katsayılarıdır ve $(-d_s,d_s)$ aralığından düzgünce $(-\pi,\pi)$ aralığına devam etmişlerdir. Şimdi $\{e^{in\theta}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ fonksiyon sisteminin ortogonalliği ve tamlığını ele alalım. (11) denkleminin Fourier katsayılarını eşitlersek şu lineer denklem sistemine varırız:

$$z_n^s \frac{1-\delta_{no}}{\tau_n^2} - 2\sum_{j=1}^{M}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} h_{n,-p}^{sj} z_p^s\right) = g_n^s,\ n = 0,\pm1,\pm2...,s = 1,2,...,M \tag{12}$$

(12)'deki her denklemi τ_n^2 ile çarpmak ile z_n^s bilinmeyenlerine göre ikinci türden biçimde bir denklem sistemine varılır. θ ve τ argümanlarına göre simetrik olan kRsj(θ,τ) fonksiyonuna bağlı olarak $h_{n,p}^{ss}$ katsayılarının da indisleri sonsuza giderken ($|n|,|p|\to\infty$) mutlak olarak aynı hızla azalacağı anlamına gelir. Ancak (12)'yi τ_n^2 ile çarpmanın, sistem ikinci türden olarak kalsa da, bu simetriyi bozacağı açıktır. Bu sorunun aşılabilmesi için katsayılarının azalma hızındaki simetrik dengeyi koruyarak (12)'deki sistemi dönüştürmek gerekir. Bu amaçla yeni bilinmeyen vektörü olarak $\tilde{z}_n^s = \tau_n^{-1} z_n^s$ tanımlamak yeterli olacaktır. Bunun (12)'de yerine yazılmasıyla ARY'nin [1-3]'de ayrıntıları verilen ve yer kazanmak için burada tekrarlanmayacak olan standart adımları ile ilerleyebiliriz. Nihai denklem sayısal olarak çözülmeden önce şu biçime varır:

$$\tilde{z}^s + \sum_{j=1}^{M}\tilde{W}_{s,j}\tilde{z}^j = \tilde{g}^s,\ \ s = 1,2,...,M \tag{13}$$

(13) denklemi esasen şu görünümdedir:

$$\left[I + \tilde{W}\right]\tilde{Z} = \tilde{g} \tag{14}$$

Burada I birim matris, $\tilde{W}$ düzgün matris, $\tilde{Z}$ bilinmeyen vektör ve $\tilde{g}$ gelen alan için yer alır. Elde olunan sistem ikinci türden ve $\tilde{W}$ operatörü sonsuz düzgün olduğundan, (14)'ün herhangi bir kesme sayısında kesilerek çözülmesi kararlıdır ve ilkesel olarak herhangi bir doğrulukta çözülebilir.

3. Sonuç

Sonlu sayıda keyfi kesitli düzgün eğrilerin modellediği mükemmel iletken sınırlardan, iki boyutta kesit düzleminde teğet manyetik-TM elektromanyetik dalgaların saçılması problemi, Helmholtz denkleminin Dirichlet sınır koşulları altındaki çözümlerinin aranmasına denktir. Bu sınır değer problemine denk, sayısal olarak kararlı çözümler ARY aracılığı ile önerilmiştir. Elde edilen çözücünün yuvarlatma hatalarından bağımsız niteliği ve elde edilen sonuçların ışık tuttuğu fiziksel olaylar sunumda yer alacaktır.

Alınan Destekler

Bu çalışma TÜBİTAK 114E927 numaralı araştırma projesince desteklenmektedir.

Kaynaklar

[1]. Poyedinchuk A.Ye., Tuchkin Yu. A.,Shestopalov ,V. P.. "New Numerical-Analytical Methods in Diffraction Theory", Mathematical and Computer Modeling, Vol.32, p.1029-1046, 2000
[2]. Shestopalov V.P., Tuchkin Yu.A., Poyedinchuk A.Ye., and Sirenko Yu.K., Novel methods for solving direct and inverse problems of diffraction theory, vol.1, Kharkov, Osnova basımevi, 1997. (Rusça)
[3]. Tuchkin Yu.A., Suvorova O., Dikmen F., "Modeling of Waveguides of Various Cross Section by Analytical Regularization Method", 20th Telecommunications Forum (TELFOR), p. 1143-1145, Belgrad, Sırbistan, 2012.