

## Termoakustik Ters Kaynak Probleminin Katmanlı Düzlemsel Ortam Modeli Kullanılarak Çözümü

Hazel Bayındır<sup>1,2</sup>, Banu Uzun<sup>2</sup>, Mithat İdemen<sup>3</sup>, Mustafa Karaman<sup>1</sup>

<sup>1</sup>İstanbul Teknik Üniversitesi  
Elektrik-Elektronik Mühendisliği  
İstanbul

hazelyucel@gmail.com, karamanmustafa@itu.edu.tr

<sup>2</sup> Işık Üniversitesi  
Matematik Bölümü  
İstanbul  
banu.uzun@isikun.edu.tr

<sup>3</sup>Okan Üniversitesi  
Elektrik-Elektronik Mühendisliği  
İstanbul  
midemen@gmail.com

### Özet

*Bu çalışmada homojen olmayan düzlemsel katmanlı ortam için termoakustik ters kaynak probleminin analitik çözümü çıkarılmıştır. Düzlemsel katmanlı modelleme, meme, deri ve karın bölgesi gibi alanların görüntülenmesine uygun bir modellemedir. Elde ettiğimiz katmanlı ortam modeline dayalı çözüm ve literatürde yer alan homojen ortam varsayımına dayalı çözüm, noktasal kaynakların yer aldığı iki katmanlı bir yapının sayısal simülasyon sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Homojen ortam varsayımına dayalı çözüm, görüntüde, geometrik bozukluklar, daha geniş ana lob genişliği ve daha yüksek yan loblar üretmektedir; katmanlı ortam için elde ettiğimiz çözüm ise kaynak yerlerini doğru olarak vermekte, daha dar ana lob ve daha düşük yan loblar üretmektedir.*

### Abstract

*In thermoacoustic imaging, conventional inverse source solution based on homogeneous medium assumption results in image distortions and reduced resolution. Here we present analytical inverse solution for inhomogeneous planar layered medium. This model is applicable for imaging of tissue structures such as skin, breast and abdominal imaging. We performed numerical simulations for point sources located in a two-layer medium. Our numerical test results show that the conventional homogeneous solution, as expected, produces incorrect locations of point sources and significantly increased side lobes, whereas our layered solution produces point sources at correct locations with narrower main lobes and lower side lobes.*

### 1. Giriş

Termoakustik görüntüleme, uluslararası düzeyde çeşitli gruplar tarafından özellikle görüntü kalitesinin ve görüntü derinliğinin artırılmasına yönelik olarak araştırmalar yürütülen bilimsel, teknolojik ve ticari potansiyeli olan fakat henüz klinik bir araç haline gelmemiş güncel bir konudur. Termoakustik görüntüleme, doku elektromanyetik dalga ile ısıtılır, elektromanyetik dalga soğuran nesnelere ısınmanın etkisiyle genişir ve soğuduklarında eski hallerine dönerler. Bu ısınma-soğuma nesnenin genişip büzülmesine neden olmakta ve sonuç olarak akustik dalga üretilmesini sağlamaktadır. Diğer bir deyişle, elektromanyetik enerji ile ısıtılan doku, akustik dalga kaynağı olarak işlev kazanmaktadır. Termoakustik görüntüleme dokunun elektromanyetik enerjisi soğurma ve ısı parametrelerini yansıtır ve ters kaynak bulma problemi olarak adlandırılır. Literatürde yer alan ters kaynak bulma problem çözümleri, homojen ortam varsayımına dayanmakta olup, görüntülerde önemli geometrik hatalara ve çözünürlükte azalmaya neden olmaktadır [1]. Bu çalışmada, homojen olmayan ortamın düzlemsel katmanlı olarak modellenmesine dayalı ters problem çözümü analitik olarak elde edilmiş ve sayısal olarak sınanmıştır.

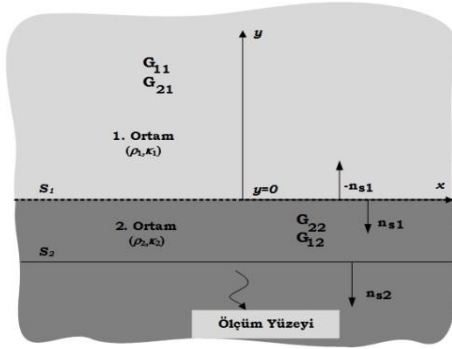
### 2. Termoakustik Görüntüleme Ters Kaynak Problemi

Termoakustik görüntüleme, homojen olmayan akustik dalga denkleminin ters çözümüne dayanmaktadır [2]:

$$\Delta p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(\mathbf{r}, t) = -\Gamma_g \frac{\partial H(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -A_0(\mathbf{r}) \delta'(t) \quad (1)$$

Burada yer alan parametrelerin tanımları şöyledir:  $p(\mathbf{r}, t)$ : akustik dalga fonksiyonu;  $H(\mathbf{r}, t)$ : ısı artış fonksiyonu (mekan ve zaman uzaylarında ayrıştırılabilir olup  $H(\mathbf{r}, t) = A_0(\mathbf{r})I(t)$ dir ), zamana bağlı kısmi dürtü fonksiyonu olarak alınmıştır ( $I(t) = \delta(t)$ );  $\Gamma_g$ : Grünsen parametresi;  $A_0(\mathbf{r})$ : kaynak dağılım fonksiyonu;  $c$ : ortamdaki akustik dalganın hızı;  $\mathbf{r}$ : uzaysal konum [3]. Dalga denklemi zamansal frekans uzayında (Helmholtz denklemi) şöyle ifade edilmektedir:

$$\Delta P(\mathbf{r}, w) + k^2 P(\mathbf{r}, w) = -iw A_0(\mathbf{r}) . \quad (2)$$



$$p(r, t) = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad |r| \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial p}{\partial |r|}(r, t) - ik p(r, t) = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad |r| \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1(r, t)}{\partial n} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2(r, t)}{\partial n}, \quad p_1(r, t) = p_2(r, t),$$

$$p(r, t = 0) = A_0(r)$$

Şekil 1. Katmanlı Ortam Modeli.

Burada, dalga sayısı  $k = w/c$ . Bu bildiriye, termoakustik ters kaynak çözümü için ele alınan basitleştirilmiş iki boyutlu katmanlı düzlemsel doku yapısı ve  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  sırasıyla birinci ve ikinci ortam yoğunlukları,  $p$  ortamdaki akustik dalga fonksiyonu olmak üzere, problem çözümünde kullanılan sırasıyla radyasyon koşulları, katman yüzeyi ( $S_1$ ) üzerinde süreklilik koşulları ve  $t = 0$  anında başlangıç koşulu Şekil-1'de gösterilmiştir. Burada iki katmanlı ortam için Green fonksiyonları  $G_{ij}$  ile simgeleşmiş olup ( $i=1,2; j=1,2$ ), ilk indis kaynağın yerini ve ikinci indis ise akustik dalga dağılımının bölgesini göstermektedir. Bu çıkarımda, katmanlı Green fonksiyonları kullanılarak önce düz problem çözümü bulundu (ölçüm yüzeyinden ölçülen akustik dalga) ve daha sonra ölçülen akustik dalgayı kullanarak ters problem çözümü frekans uzayında

$$A_0(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\rho}{c_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{r}, w) \frac{\nabla G_{12}^{in}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, w)}{\partial n} dS_2 dw, & \mathbf{r} \in R_1 \\ \frac{1}{c_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{r}, w) \frac{\nabla G_{22}^{in}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, w)}{\partial n} dS_2 dw, & \mathbf{r} \in R_2 \end{cases} \quad (3)$$

şeklinde analitik olarak elde edildi. Burada  $\mathbf{r} = (x, y)$  ve  $\mathbf{r}' = (x', y')$  sırasıyla ölçüm ve kaynak yeri,  $P(\mathbf{r}, w)$  fonksiyonu ise  $V'$  kaynağı kaplayan hacim olmak üzere  $S_2$  yüzeyinden ölçülen akustik dalga fonksiyonudur (düz problem çözümü) ve pozitif frekans için aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$P(\mathbf{r}, w) = iw \int_{V'} (G_1^{out}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, w) + G_2^{out}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, w)) A_0(\mathbf{r}') dV'. \quad (4)$$

Katmanlı düzlemsel bölgede Green fonksiyonları pozitif frekans için aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$G_1^{out} = \begin{cases} G_{11}^{out} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_{1y}} \left( \frac{k_{1y}\rho - k_{2y}}{k_{1y}\rho + k_{2y}} e^{-k_{1y}(y+y')} + e^{-k_{1y}|y-y'|} \right) e^{ik_x(x-x')} dk_x & y > 0, \\ G_{12}^{out} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\rho}{k_{1y}\rho + k_{2y}} e^{-k_{1y}y'} e^{k_{2y}y} e^{ik_x(x-x')} dk_x & y < 0. \end{cases} \quad (5)$$

$$G_2^{out} = \begin{cases} G_{22}^{out} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_{2y}} \left( \frac{k_{2y} - k_{1y}\rho}{k_{1y}\rho + k_{2y}} e^{k_{2y}(y+y')} + e^{-k_{2y}|y-y'|} \right) e^{ik_x(x-x')} dk_x & y < 0, \\ G_{21}^{out} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{k_{1y}\rho + k_{2y}} e^{k_{2y}y'} e^{-k_{1y}y} e^{ik_x(x-x')} dk_x & y > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Burada  $k_x$ ,  $x$ -yönündeki uzaysal frekans;  $k_{1y}$  ve  $k_{2y}$  sırasıyla birinci ve ikinci bölgede  $y$ -yönündeki uzaysal frekanslar olup

$$k_{1y} = \sqrt{\frac{w^2}{c_1^2} - k_x^2}, \quad k_{2y} = \sqrt{\frac{w^2}{c_2^2} - k_x^2} \quad (7)$$

şeklinde ifade edilir.  $G^{out}$  (outgoing wave) ve  $G^{in}$  (incoming wave) sırasıyla dışa ve içe doğru yayılan dalga dağılımını göstermekte olup aralarında kompleks eşlenik ilişkisi vardır ( $G^{in} = (G^{out})^*$ ). Termoakustik denklemin literatürde yer alan homojen ortam için düz ve ters çözümü şu şekildedir.

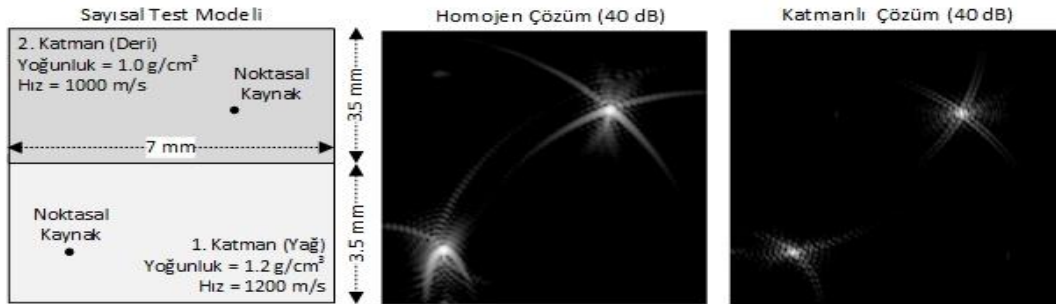
$$P(\mathbf{r}, w) = iw \int_{V'} A_0(\mathbf{r}') G_h^{out}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, w) dV' \quad G_h^{out}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, w) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k_{0y}} e^{-k_{0y}|y-y'|} e^{ik_x(x-x')} dk_x \quad (8)$$

$$A_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{c_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{r}, w) \frac{\nabla G_h^{in}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, w)}{\partial \mathbf{n}} dS_2 dw, \quad G_h^{in}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, w) = (G_h^{out}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, w))^* \quad (9)$$

Burada  $G_h^{out}$  ve  $G_h^{in}$  sırasıyla dışa ve içe doğru yayılan serbest uzay Green fonksiyonları;  $c_0$  ise homojen ortamdaki akustik dalga hızıdır.

### 3. Sayısal Simulasyonlar

Bu çalışmada elde ettiğimiz katmanlı ortam modeline dayalı çözüm ve literatürde yer alan homojen ortam varsayımına dayalı çözüm, karşılaştırma yapmak için Şekil-2'de gösterilen noktasal kaynakların yer aldığı iki katmanlı bir yapı (yağ ve deri doku parametreleri) alınarak sayısal olarak hesaplanmıştır. Hesaplama sonuçları Şekil-2'de görüntü formatında verilmiştir. Homojen ortam çözüm sonuçlarında, kaynak yerlerinde geometrik sapma, geniş ana lob genişliği ve yüksek yan loblar gözlemlenmekte olup; katmanlı ortam için elde edilen çözümün ise kaynak yerlerini geometrik olarak doğru verdiği, daha dar ana lob ve daha düşük yan loblar ürettiği gözlemlenmiştir. Bu sonuçlar, katmanlı ortam modeline dayalı çözümün, homojen ortam varsayımına dayalı çözüme göre daha yüksek noktasal (dar ana lob) ve kontrast (düşük yan loblar) çözünürlüğü üretebildiğini göstermektedir.



Şekil 2. Sayısal simulasyon sonuçları.

### 4. Sonuç

Bu çalışmada termoakustik görüntüleme için düzlemsel katmanlı doku modellenmesine dayalı ters problem çözümü analitik olarak çıkarılmıştır ve literatürde yer alan homojen ortam varsayımına dayalı çözümle sayısal olarak karşılaştırılmıştır. Çıkarılan katmanlı çözümün literatürdeki homojen çözüme göre daha yüksek kalitede termoakustik görüntü üretebileceği gösterilmiştir. Çözümün 3 boyutlu ve çok katmanlı yapılara genişletilmesi üzerine çalışmalarımız devam etmektedir.

**Teşekkür:** Bu çalışma 213E038 nolu proje kapsamında TÜBİTAK tarafından desteklenmektedir.

### Kaynaklar

- [1]. Idemen M. ve Alkumru A., "On an inverse source problem connected with photo-acoustic and thermo-acoustic tomographies," Wave Motion, 595-604, 2012.
- [2]. Schoonover R. W. ve Anastasio M., "Image reconstruction in photoacoustic tomography involving layered acoustic media," J Opt Soc Am A Opt Image Sci Vis., 28(6): 1114-1120, 2011.
- [3]. Wang L.V. ve Yang X., "Universal Back-Projection Algorithm for Photoacoustic Computed Tomography," Physical Review E, 016706, 2005.