

## Hibrit Momentler Metodu ve Fiziksel Optik Metodunun Doğruluğunun ve Verimliliğinin İyileştirilmesi

Mustafa Akbaş, Lale Alatan\*, Özgür Ergül\*  
Hava Harp Okulu  
Elektronik Mühendisliği Bölümü  
İstanbul  
makbas@hho.edu.tr, mustafa.akbas@metu.edu.tr,

\*Orta Doğu Teknik Üniversitesi  
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü  
Ankara  
lalatan@metu.edu.tr, ozgur.ergul@eee.metu.edu.tr

**Özet:** Geniş ölçekli elektromanyetik problemlerin tam-dalga yöntemler ile çözülmesi büyük miktarda hesaplama gücü ve depolama alanı gerektirmektedir. Bu nedenle, tam-dalga yöntemler sıklıkla asimptotik çözücülerle birlikte hibrit olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmaların başarılı bir örneği verimli döngüsel-momentler metodu-fiziksel optik (VD-MM-FO) yöntemidir. Bu çalışmada, çok seviyeli hızlı çokkutup yöntemi (ÇSHÇY), VD-MM-FO yönteminin verimliliğini ve doğruluğunu artırmak için kullanılmaktadır. Sayısal bir örnekle verimlilik ve doğruluk artışı gösterilmektedir.

**Abstract:** Solutions of large-scale electromagnetic problems using full-wave methods require enormous amounts of CPU power and storage. Hence, full-wave methods are frequently hybridized with asymptotic solvers. An efficient iterative method of moments physical optics (EI-MoM-PO) technique is a successful example of this approach. In this paper, the multilevel fast multipole algorithm is used to further increase the efficiency and accuracy of the EI-MoM-PO technique. The efficiency and accuracy of the proposed approach is demonstrated through a numerical example.

### 1. Giriş

Elektromanyetik ışınım ve saçılma problemlerinde momentler metodu (MM) gibi tam-dalga çözücüler sıklıkla kullanılmaktadır. MM elektriksel olarak büyük olan yapılara uygulandığında çok miktarda depolama kapasitesi ve hesaplama gücü ihtiyacı ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle, çok seviyeli hızlı çokkutup yöntemi (ÇSHÇY) [1] gibi depolama ve hesaplama gücü ihtiyacını azaltan hızlı yöntemler geliştirilmiştir. Elektriksel olarak daha da büyük yapıların kabul edilebilir doğrulukla analiz edilebilmesi için tam-dalga yöntemler çoğunlukla fiziksel optik (FO) ve benzeri asimptotik yöntemlerle birlikte uygulanmaktadır. Hibrit çözücüler olarak adlandırılan bu yöntemlerin başarılı bir örneği verimli döngüsel MM-FO (VD-MM-FO) yöntemidir [2].

### 2. VD-MM-FO Yöntemi

Mükemmel iletken yapılmış bir nesnenin yüzeyini  $\Omega$  ile gösterelim. Tam-dalga çözücülerin doğruluğunu ve asimptotik çözücülerin hızını etkin olarak kullanabilmek amacıyla  $\Omega$  bölgesi,  $\Omega_{MM}$  olarak gösterilen MM bölgesi ve  $\Omega_{FO}$  olarak gösterilen FO bölgesi şeklinde iki parçaya ayrılmaktadır. MM bölgesi antenleri ve küçük detayları olan bölümleri içerirken FO bölgesi geniş ve görece düz bölümleri içermektedir.  $\Omega_{MM}$  ve  $\Omega_{FO}$  bölgelerinde indüklenen akımları sırasıyla  $\mathbf{J}_{MM}$  ve  $\mathbf{J}_{FO}$  ile gösterelim. Bu akımlar RWG baz fonksiyonları  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$  kullanılarak

$$\mathbf{J}_{MM}(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^M I_{MM}^m \mathbf{f}_{MM}^m(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \Omega_{MM} \quad (1)$$

$$\mathbf{J}_{FO}(\mathbf{r}) = \sum_{p=1}^P I_{FO}^p \mathbf{f}_{FO}^p(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \Omega_{FO} \quad (2)$$

şeklinde bilinmeyen  $I_{MM}^m$  ve  $I_{FO}^p$  katsayıları cinsinden ifade edilebilmektedir. MM bölgesinde  $M$  adet ve FO bölgesinde  $P$  adet olmak üzere toplam bilinmeyen sayısı  $N = M + P$  adettir. VD-MM-FO yönteminde bilinmeyen katsayıları bulmak için MM bölgesinde elektrik-alan integral denklemi (EAİD), FO bölgesinde ise fiziksel optik yaklaşımı kullanılmaktadır. EAİD,  $\Omega_{MM}$ 'de toplam elektrik alanının (gelen + saçılan) yatay bileşeni

sıfır olacak şekilde, MM bölgesindeki akımların bir biri ile olan etkileşimlerinin Galerkin test yöntemi ile hesaplanmasına dayanmaktadır. Buna göre EAİD  $k$ 'nci akım elemanı için aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

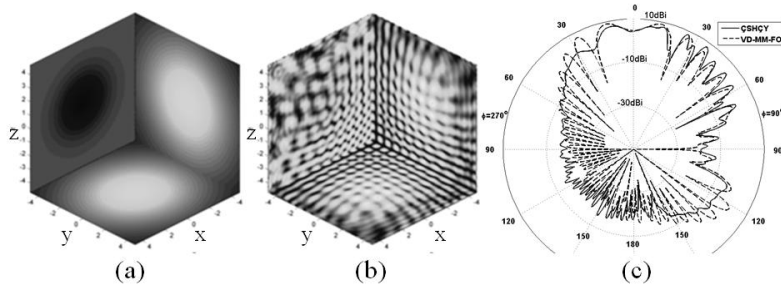
$$\sum_{m=1}^M Z_{MM}^{km} I_{MM}^{0,m} = V_{MM}^k, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad Z_{MM}^{km} = \langle \mathbf{f}_{MM}^k, \mathbf{E}^k(\mathbf{f}_{MM}^m) \rangle, \quad V_{MM}^k = -\langle \mathbf{f}_{MM}^k, \mathbf{E}^g \rangle \quad (3)$$

Burada  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  iç çarpımı,  $Z_{MM}^{km}$ ,  $m$ 'nci ve  $k$ 'nci MM akım elemanları arasındaki etkileşimi,  $V_{MM}^k$  ise MM bölgesinde  $k$ 'nci akım elemanının tanımlı olduğu yerde test edilmiş uyarı elektrik alanını ( $\mathbf{E}^g$ ) göstermektedir. VD-MM-FO yönteminde MM ve FO bölgesindeki etkileşimlerin dikkate alındığı dögüsel bir yaklaşım takip edilmektedir ve  $I_{MM}^{0,m}$  ifadesindeki birinci üst simge dögü numarasını göstermek için kullanılmaktadır. Sıfır değeri FO bölgesi dikkate alınmadan (FO bölgesi yok kabul edilerek) sadece dışarıdan gelen uyarıya cevap olarak oluşan MM akımlarını ( $\mathbf{J}_{MM}$ ) ifade etmektedir. Hesaplanan MM akımlarının yapacağı ışıma sonucunda  $\Omega_{FO}$  bölgesinde bir manyetik alan oluşacak, FO yaklaşımına göre de bu manyetik alana cevap olarak FO akımları ( $\mathbf{J}_{FO}$ ) oluşacaktır. FO akımları herhangi bir matris denklemini çözmeden FO yaklaşımı ile [3]'te verilen formüller kullanılarak bulunmaktadır. MM akımlarına benzer şekilde FO akımları da her yönde ışıma yapacak ve  $\Omega_{MM}$  bölgesinde bir elektrik alan oluşturacaktır. MM bölgesinde dışarıdan gelen  $\mathbf{E}^g$  uyarısına ilave olarak FO akımlarından dolayı oluşan elektrik alanının da aşağıdaki şekilde denkleme dahil edilmesi gerekmektedir.

$$\sum_{m=1}^M Z_{MM}^{km} I_{MM}^{i,m} = V_{MM}^k + \Delta V^{i,k}, \quad \Delta V^{i,k} = -\langle \mathbf{f}_{MM}^k, \mathbf{E}_{MM}^k(\mathbf{J}_{FO}^i) \rangle, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (4)$$

Burada  $i$  dögü numarasını göstermektedir ve  $\Delta V^{i,k}$  terimi;  $i$ 'nci dögüdeki FO akımlarının ( $\mathbf{J}_{FO}^i$ ),  $\Omega_{MM}$  bölgesindeki  $k$ 'nci akım elemanının bulunduğu yerde oluşturduğu elektrik alanının  $\mathbf{E}_{MM}^k(\mathbf{J}_{FO}^i)$  test edilmesi ile elde edilmektedir. Özet olarak MM bölgesindeki akımlar, FO bölgesinde FO yöntemi ile hesaplanan akımlar oluşturmakta, oluşan FO akımları da MM bölgesi üzerinde bir elektrik alan oluşturarak her dögüde  $I_{MM}^{i,m}$  değerlerinin değişmesine sebep olmaktadır. Dögü ilerledikçe  $I_{MM}^{i,m}$  değerleri belirli bir değere yakınsamaktadır, birbirini takip eden iki dögü arasındaki oransal değişim önceden belirlenen bir eşik değerinin altına düştüğünde dögü sonlandırılmaktadır.

Yukarıda özetlenen VD-MM-FO yöntemi ile Şekil 1'de görülen kenarları 12 dalga boyu uzunluğunda olan 3 kenarlı köşe yansıtıcının merkezinde yer alan ve y-ekseni boyunca uzanan yarım dalga dipol antenin ışıması incelenmiştir. VD-MM-FO yöntemi ile yapılan çözümde,  $\Omega_{MM}$  sadece dipol antenden oluşmaktadır. Sonuçların karşılaştırılması için aynı yapı ÇSHÇY ile de analiz edilmiş ve yansıtıcılar üzerinde oluşan akım dağılımları ve ışıma diyagramları karşılaştırmalı olarak Şekil 1'de sunulmuştur. Sonuçlardan gözleneceği gibi bu örnek için VD-MM-FO yöntemi ile elde edilen sonuçların hata oranı yüksektir. Akım dağılımları incelendiğinde, köşe yansıtıcı üzerindeki FO akımlarının dipol tarafından yaratılan alanların izdüşümü olduğu görülmektedir. Bu nedenle FO bölgesi akımlarını hesaplarken sadece MM bölgesi akımlarının neden olduğu manyetik alanın hesaba katılmasının çoklu yansımaların olduğu bu çeşit geometrilere VD-MM-FO yönteminin hata oranını artırdığı gözlenmiştir. Bu gözlem ışığında bu çalışmada VD-MM-FO yönteminin doğruluğunun artırılması için FO bölgesinde MM akımlarının neden olduğu alanlara ek olarak FO akımlarının neden olduğu alanların da hesaplanması önerilmektedir. Doğruluk artırmaya yönelik bu ek hesaplamalar elbette yöntemin verimliliğini büyük ölçüde düşürecektir. Verimi düşürmeden doğruluğu iyileştirmek için ÇSHÇY yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemde çok sayıdaki akım elemanının yakın alanı dışındaki çok sayıdaki gözlem noktasında oluşan elektrik ya da manyetik alanı alt gruplamalar yapılarak hızlı bir şekilde hesaplanabilmektedir.



Şekil 1: (a) VD-MM-FO yöntemi akım dağılımı, (b) ÇSHÇY akım dağılımı, (c) Işıma diyagramları, yz düzlemi.

### 3. ÇSHÇY ile Doğruluk ve Verimliliğin İyileştirilmesi

ÇSHÇY, MM denklemlerinde matris-vektör çarpımlarını hızlandırmak ve depolama ihtiyacını azaltmak için

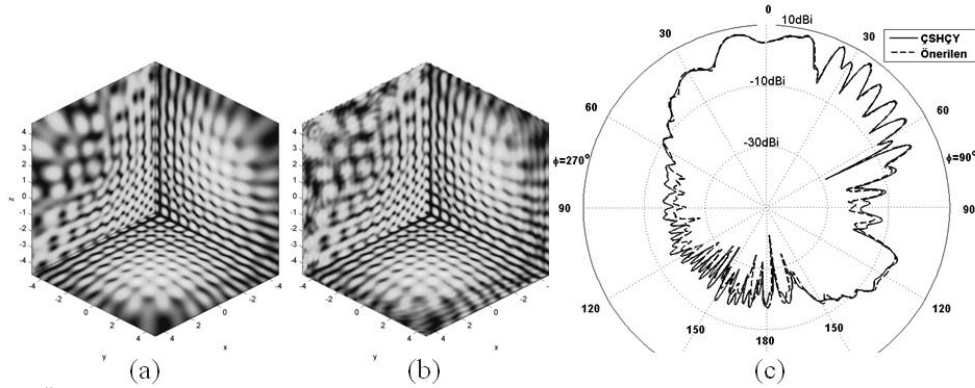
kullanılan etkin bir yöntemdir.  $\mathbf{Z}$  ve  $\mathbf{I}$  sırasıyla MM empedans matrisi ve akım vektörü olmak üzere matris-vektör çarpımı, MM empedans matrisinin yakın alan (YA) ve uzak alan (UA) matrisi olarak parçalanması ile  $\mathbf{Z}\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{YA}\mathbf{I} + \mathbf{Z}^{UA}\mathbf{I}$  şeklinde hesaplanır.  $\mathbf{Z}^{YA}$  başlangıçta bir defa hesaplanıp depolanırken,  $\mathbf{Z}^{UA}\mathbf{I}$  çarpımı ise iteratif çözümlerin her döngüsünde verimli şekilde hesaplanmaktadır ve matris depolama alanı gerektirmemektedir. EAİD ve manyetik-alan integral denkleminin (MAİD) ÇSHÇY ile çözümüyle ilgili detaylar [1]'de yer almaktadır. Özet olarak, ÇSHÇY iteratif çözümlerin her döngüsünde mevcut akım değerlerini kullanarak EİAD için test edilmiş saçılmış elektrik alanı, MAİD için de yüzey normali ile vektör çarpımı alınıp test edilmiş saçılmış manyetik alanı hesaplanmaktadır. Bu nedenle denklem (4)'te yer alan  $\Delta V^{l,k}$  değerlerinden oluşan  $\Delta V^i$  vektörü ÇSHÇY-EAİD yöntemi ile,  $\mathbf{I}_{FO}^i$  ise ÇSHÇY-MAİD yöntemi [3]'teki test yöntemi ile birlikte kullanılarak, sırasıyla denklem (5) ve (6)'daki gibi verimli şekilde hesaplanabilmektedir.

$$\begin{bmatrix} \Delta V^i \\ \mathbf{0}_{P \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times M} & \mathbf{Z}_{FO-FO}^{YA,EAİD} \\ \mathbf{0}_{P \times M} & \mathbf{0}_{P \times P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times 1} \\ \mathbf{I}_{FO}^{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times M} & \mathbf{Z}_{FO-FO}^{UA,EAİD} \\ \mathbf{0}_{P \times M} & \mathbf{0}_{P \times P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times 1} \\ \mathbf{I}_{FO}^{i-1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times 1} \\ \mathbf{I}_{FO}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times M} & \mathbf{0}_{M \times P} \\ \mathbf{Z}_{FO-MM}^{YA,MAİD} & \mathbf{Z}_{FO-FO}^{YA,MAİD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{MM}^{i-1} \\ \mathbf{I}_{FO}^{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times M} & \mathbf{0}_{M \times P} \\ \mathbf{Z}_{FO-MM}^{UA,MAİD} & \mathbf{Z}_{FO-FO}^{UA,MAİD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{MM}^{i-1} \\ \mathbf{I}_{FO}^{i-1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

#### 4. Sayısal Örnek

Şekil 1'deki problem, önerilen yöntemle çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar ÇSHÇY ile kıyaslamalı olarak Şekil 2'de verilmiştir. Önerilen yöntemde FO-FO etkileşimlerinin verimli şekilde hesaplanması sonucunda elde edilen akım dağılımları ÇSHÇY akım dağılımlarına çok benzer çıkmıştır. Şekil 2(c)'de,  $\phi=90^\circ$  ve  $\phi=270^\circ$  düzlemindeki ışın diyagramı gösterilmektedir.  $\phi=270^\circ$  ve  $\theta>90^\circ$  bölgeleri yansıtıcıların arkasında (karanlık bölge) kalmasına rağmen önerilen yöntemle ışın diyagramları karanlık bölgede dahi kabul edilebilir bir doğrulukla hesaplanabilmektedir. Kenar akımlarının daha iyi çözülmesi amacıyla  $\Omega_{MM}$  dipol anten ile birlikte yansıtıcının kenarlarında ince şeritler içerecek şekilde genişletildiğinde karanlık bölgedeki ışın diyagramı daha da iyileştirilebilmektedir. Böyle bir genişletme sonucunda VD-MM-FO çözüm süresi ciddi oranda artarken, önerilen yöntemin çözüm süresi neredeyse sabit kalmaktadır.



Şekil 2: (a) Önerilen yöntemin akım dağılımı, (b) ÇSHÇY akım dağılımı, (c) Işın diyagramları, yz düzlemi.

#### 5. Sonuç

VD-MM-FO yöntemindeki etkileşimlerin ÇSHÇY yöntemi ile hesaplanması ile çözüm süresi açısından dikkate değer bir verimlilik artışı sağlanmıştır. Bire bir etkileşim hesaplama yolu takip edildiğinde  $P^2 \cong N^2$  ile orantılı FO-FO etkileşimlerinin ÇSHÇY ile verimli şekilde ( $P \log P \cong N \log N$ ) hesaplanmasıyla hem akım dağılımında hem de ışın diyagramında doğruluk artışı sağlamıştır. ÇSHÇY ile elde edilen sonuçlara yakın sonuçlar, yaklaşık beşte bir hesaplama süresi ve daha az hesaplama gücü ve depolama yeri kullanılarak elde edilmiştir.

#### Kaynaklar

- [1]. Ergül Ö. ve Gürel L., The Multilevel Fast Multipole Algorithm (MLFMA) for Solving Large-Scale Computational Electromagnetics Problems. Wiley-IEEE Press, 2014.
- [2]. Liu Z. L. ve Wang C. F., "Efficient iterative method of moments/physical optics hybrid technique for electrically large objects," IEEE Trans. Antennas Propag., cilt. 60, no. 7, s. 3520–3525, Tem. 2012.
- [3]. Jakobus U. ve Landstorfer F. M., "Improved PO-MM hybrid formulation for scattering from three-dimensional perfectly conducting bodies of arbitrary shape," IEEE Trans. Antennas Propag., cilt. 43, s. 162–169, Feb. 1995.