İki Boyutlu Saçılma Problemleri İçin Kapalı Eğrilerin Hermite-Spline Aradeğerlemesi Temelli Düzgünleştirilmesi

Selim Şahin, Yury A. Tuchkin, Fatih Dikmen
Gebze Teknik Üniversitesi
Elektronik Mühendisliği Bölümü
Gebze/Kocaeli
ssahin@gtu.edu.tr, yury.tu@gmail.com, dikmen@gtu.edu.tr

Özet: *İki boyutlu saçılma problemlerinde Helmholtz denkleminin çözümleri olan yoğunluk fonksiyonları, üzerinde tanımlandıkları kapalı eğrinin parametrik gösterimine bağlı niteliktedir. Bu çalışmada, integral denklemler ile çeşitli sınır koşulları altında bu çözümlerin aranması sırasında, verilen bir nokta kümesine göre aradeğerleme (interpolation) ile düzgün bir parametrizasyon elde edilmesi "Hermite-Spline"ları aracılığı ile ele alınmaktadır. Aradeğerleme, Fourier seri katsayılarının analitik bulunabilmesine ve bunların sonsuz seri toplamının Cesaro toplamı veya Tikhonov regülarizasyonu gibi yöntemler ile gerçekleştirilebilmesine yönelik bir örneklemin kaynağı olarak yarar sağlamaktadır. Böylece kapalı sınır eğrisine, integral denklem çözümlerinin hızlı yakınsaması için kullanışlı, sonsuz düzgün bir parametrik gösterime kavuşturulması hedeflenmektedir.*

Abstract: *Density functions as solutions of Helmholtz equation in two dimensional scattering problems are related to the parametric representation of the closed curve on which they are defined. In this study, searching a smooth parametrization via interpolation for a set of sample points, during the investigation of these solutions via integral equations under certain boundary conditions, is considered by means of "Hermite-Splines". Interpolation serves as the source of samples to find Fourier coefficients analytically and enabling their infinite sum as Fourier series stably with the methods such as Cesaro summation or Tikhonov regularization. Thus, it is aimed to bring the closed boundary curve to an infinitely smooth parametric representation for solutions of integral equations to converge faster.*

1. Giriş

İntegral denklemler aracılığı ile çözüm aranan iki boyutlu saçılma problemlerinde bilinmeyen fonksiyonun en yüksek kaçıncı türeve kadar sürekli olduğu yani düzgünlüğü oranında çözümün yakınsamasının daha hızlı olduğu bilinmektedir. Eğer fonksiyon sonsuz düzgün ise yakınsama en hızlı şekilde gerçekleşir [1]. Birinci türevin sürekli olması için Hermite spline, eğer ikinci türevin de sürekli olması gerekiyorsa kübik spline, 5. türeve kadar sürekli olması isteniyorsa 6. dereceden spline aradeğerlemesi yapılabilir [2]. Bu yöntem tutarlı olmasına rağmen işlem yükü spline derecesi ile hızlıca artmaktadır. Fakat asıl dezavantajı her hâlükârda aradeğerlemenin bir üst türevinin süreksiz olması yani sonsuz düzgün olmamasıdır.

Bunu aşmak için önce belirlenen bir hata kriteri ile Hermite spline aradeğerlemesi yapılıp Fourier katsayıları, ki spline interpolasyonu için analitik olarak hesaplanabilmektedir, bulunarak Fourier transformu yapılabilir. Bu yöntem hızlı Fourier dönüşümü (Fast Fourier Transform–FFT) vb. yöntemlerden farklıdır çünkü onlarda eğer fonksiyon yeterince düzgün değilse gerekli integraller yavaş yakınsamaktadır. Fourier katsayıları spline interpolasyonu için analitik olarak hesaplanabildiğinden bu sorun aşılabilmektedir. Teorik olarak herhangi bir sonlu Fourier serisi sonsuz türevlenebilir bir fonksiyondur. Fakat türev ifadesinde süreksizlik olmasa dahi çok büyük sıçramalar çıkabilir ve sıçrama noktalarında Gibbs etkisi yani salınımlar gözlemlenir. Bu yüzden ek olarak yumuşatma işlemine ihtiyaç duyulur. Bunun için Cesaro toplamı gibi yöntemler kullanılabilir fakat yine de yüksek dereceden türevlerde büyük salınımlar bulunmaya devam eder. Bu yüzden farklı bir yaklaşımda bulunuruz:

Önce spline interpolasyonu için türevin kaçıncı dereceye kadar (3, 5, 7.) sürekli olmasının istenildiği belirlenir ve Tikhonov düzgünleştirmesi uygulanarak bu dereceye kadar türevin sürekliliğini sağlanır [3]. Daha yüksek dereceden türevlerinin de sürekli olması için Tikhonov düzgünleştirmesini üstel çarpan ile yapmak gerekir çünkü cebrik çarpan kullanıldığında bir üst türev yine süreksiz olacaktır. Üstel çarpan kullanılırsa istenildiği kadar türevlenebilir ve cebrik çarpanla kıyaslandığında daha hızlı yakınsar.

2. Spline İnterpolasyonu ve Fourier Katsayıları

Kapalı bir eğri ile $\boldsymbol{f}(\phi) = (\boldsymbol{x}(\phi), \boldsymbol{y}(\phi))$ biçiminde $\left(\boldsymbol{x}(\phi) = \rho(\phi)\boldsymbol{cos}(\phi), \boldsymbol{y}(\phi) = \rho(\phi)\boldsymbol{sin}(\phi)\right)$, örneklem noktaları $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \left((\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}), (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}), (\boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{y_3}), \ldots, (\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y_n})\right)$ elde olunabilir. Bu noktaların ϕ parametreleri yapılacak interpolasyona veri aktarmadığı için yeni bir parametrizasyona gereksinim vardır. İlk örnekte yeni parametre sıfır olmalı ve bu kapalı eğriden alınan noktaların her birine karşı gelen monoton artan bir biçimde verilmelidir. Bu parametreleri $\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}, \boldsymbol{t_3}, \ldots, \boldsymbol{t_n}$ olarak gösterirsek, $\boldsymbol{t_i} = \boldsymbol{t_{i-1}} + |(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i}) - (\boldsymbol{x_{i-1}}, \boldsymbol{y_{i-1}})|$ ve $\boldsymbol{t_1} = \boldsymbol{0}$ olacak biçimde belirlemek gerekir. Sonuç itibarıyla spline $[\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_n}]$ aralığında geçerli olacaktır. $\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}(t), \widetilde{\boldsymbol{Y}}(t)\right)$ fonksiyonları ise bu aralığın alt aralıklarında tanımlı kübik polinomlardan oluşturulacaklardır:

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \begin{cases} \tilde{\boldsymbol{x}}_1(\boldsymbol{t}), & \boldsymbol{t_1} \le \boldsymbol{t} < \boldsymbol{t_2} \\ \tilde{\boldsymbol{x}}_2(\boldsymbol{t}), & \boldsymbol{t_2} \le \boldsymbol{t} < \boldsymbol{t_3} \\ \vdots & \\ \tilde{\boldsymbol{x}}_i(\boldsymbol{t}), & \boldsymbol{t_{i-1}} \le \boldsymbol{t} < \boldsymbol{t_i} \\ \vdots & \\ \tilde{\boldsymbol{x}}_n(\boldsymbol{t}), & \boldsymbol{t_{n-1}} \le \boldsymbol{t} < \boldsymbol{t_n} \end{cases} \quad \widetilde{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{t}) = \begin{cases} \tilde{\boldsymbol{y}}_1(\boldsymbol{t}), & \boldsymbol{t_1} \le \boldsymbol{t} < \boldsymbol{t_2} \\ \tilde{\boldsymbol{y}}_2(\boldsymbol{t}), & \boldsymbol{t_2} \le \boldsymbol{t} < \boldsymbol{t_3} \\ \vdots & \\ \tilde{\boldsymbol{y}}_i(\boldsymbol{t}), & \boldsymbol{t_{i-1}} \le \boldsymbol{t} < \boldsymbol{t_i} \\ \vdots & \\ \tilde{\boldsymbol{y}}_n(\boldsymbol{t}), & \boldsymbol{t_{n-1}} \le \boldsymbol{t} < \boldsymbol{t_n} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}\\ \tilde{\boldsymbol{y}}\end{pmatrix}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{l=0}}^{\boldsymbol{3}} \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{i},\binom{x}{y},\boldsymbol{l}}\boldsymbol{t^l} \\ \begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}\\ \tilde{\boldsymbol{y}}\end{pmatrix}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{t_{i-1}}) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{t_{i-1}}) \\ \begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}\\ \tilde{\boldsymbol{y}}\end{pmatrix}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{t_i}) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{t_i}) \\ \begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}\\ \tilde{\boldsymbol{y}}\end{pmatrix}'_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{t_{i-1}}) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}'_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{t_{i-1}}) \\ \begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}\\ \tilde{\boldsymbol{y}}\end{pmatrix}'_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{t_i}) = \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{pmatrix}'_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{t_i}) \end{array} \right. \tag{1}$$

En sağda aranan kübik polinom biçimi ve her alt aralıkta katsayılarının belirlenmelerine imkân tanıyan fonksiyonların kendilerine ve birinci türevlerine ilişkin süreklilik gereksinimi verilmiştir. Bu türden kurulan spline interpolasyonu, Hermite Spline interpolasyonu olarak bilinir. Alt aralıklarda türevlerin en genel halde yaklaşık olarak nümerik hesaplandığı da. Ancak buna ek olarak süperformül [4] gibi türevlerinin de ifadelerinin bilinmekte olduğu durumlarda buradaki türeve dair süreklilik koşulunun yaklaşık eşit değil de eşit olarak alınabilmesi imkânını vermiştir.

Kapalı düzgün bir eğri $\boldsymbol{f}(\phi) = \left(\boldsymbol{x}(\phi), \boldsymbol{y}(\phi)\right)$ biçiminde verilir ve belirli bir $\varepsilon>0$ hata değeri için $\phi\in[-\pi,\pi]$ de verilen tüm değerler için uyarlamalı olarak $\left(\widetilde{\boldsymbol{X}}, \widetilde{\boldsymbol{Y}}\right)$ fonksiyonları belirlenebilir. Bu amaçla $\left|\left(\boldsymbol{x}(\phi), \boldsymbol{y}(\phi)\right) - \left(\tilde{\boldsymbol{x}}(\phi), \tilde{\boldsymbol{y}}(\phi)\right)\right| + \left|\left(\boldsymbol{x}'(\phi), \boldsymbol{y}'(\phi)\right) - \left(\tilde{\boldsymbol{x}}'(\phi), \tilde{\boldsymbol{y}}'(\phi)\right)\right| < \boldsymbol{\varepsilon}$ sağlanana kadar alt aralıkların yeniden bölünmesi ile nihai nokta kümesine varılabilir. Burada $\boldsymbol{t}$ ve ϕ bire bir parametreler olduğu için yukarıdaki t parametrik formüllerin ilgili karşılıkları kastedilmiştir. Tek değişkenli $\boldsymbol{f}(\phi)$ nin Hermite spline interpolasyonu $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})$ ve Fourier katsayısı $\boldsymbol{C_m}$ olsun. $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})$ sürekli ve periyodik olduğu için $\boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{t_{i+1}}) = \boldsymbol{g_{i+1}}(\boldsymbol{t_{i+1}})$; $\boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{t_1}) = \boldsymbol{g_n}(\boldsymbol{t_{n+1}})$. Ayrıca kübik polinom olduğundan integrali ve türevleri alt aralıklarda analitik olarak mevcut olur ve üçüncü türevi de bir sabittir. Burada $\boldsymbol{G_i}(\boldsymbol{t_i})$ her alt aralıkta interpolasyonun Fourier katsayısı $\boldsymbol{C_m}$ ye katkısıdır:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t}) = \begin{cases} \boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{t}), & \boldsymbol{t_1} \le \boldsymbol{t} < \boldsymbol{t_2} \\ \boldsymbol{g_2}(\boldsymbol{t}), & \boldsymbol{t_2} \le \boldsymbol{t} < \boldsymbol{t_3} \\ \vdots & \\ \boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{t}), & \boldsymbol{t_{i-1}} \le \boldsymbol{t} < \boldsymbol{t_i} \\ \vdots & \\ \boldsymbol{g_n}(\boldsymbol{t}), & \boldsymbol{t_{n-1}} \le \boldsymbol{t} < \boldsymbol{t_n} \end{cases} = \sum_{\boldsymbol{m=-\infty}}^{\infty} \boldsymbol{C_m e^{jmt}} \Rightarrow \boldsymbol{C_m} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\pi}}\int_{-\boldsymbol{\pi}}^{\boldsymbol{\pi}} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{e^{-jmt}dt} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\pi}}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{G_i}(\boldsymbol{t_i}) \tag{2}$$

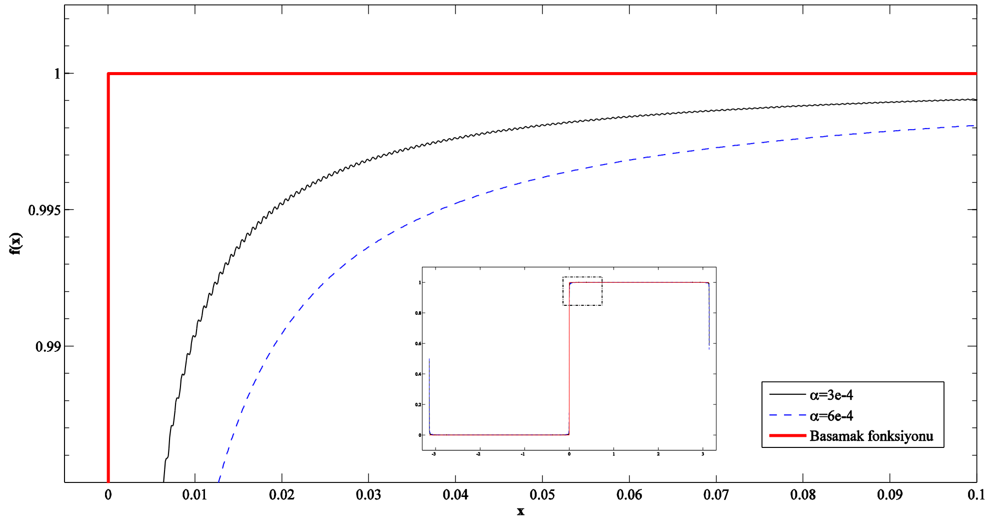
$$\boldsymbol{G_i}(\boldsymbol{t_i}) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\boldsymbol{t_i}}^{\boldsymbol{t_{i+1}}} \boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dt}\,; & \boldsymbol{m = 0} \\ \displaystyle -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{m^3}}\left[\boldsymbol{j}\{\boldsymbol{g_i''}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{e^{-jmt}}\}_{\boldsymbol{t_i}}^{\boldsymbol{t_{i+1}}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{m}}\{\boldsymbol{g_i'''}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{e^{-jmt}}\}_{\boldsymbol{t_i}}^{\boldsymbol{t_{i+1}}}\right]\,; & \boldsymbol{m \neq 0} \end{cases} \tag{3}$$

3. Tikhonov Düzgünleştirmesi

Düzgünleştirme Fourier katsayılarının serinin indisine bağımlı bir değişken ile çarpılması şeklinde yapılır. Bu çarpan cebrik veya üstel olarak seçilebilir:

$$\widetilde{C}_m = \lambda_m C_m$$
$$\lambda_m = 1/\left(1 + \alpha\,|m|^k\right) \quad veya \quad \lambda_m = 1/e^{\alpha|m|} \tag{4}$$

Üstel çarpan ile düzgünleştirme yapılırken düzgünleştirmeyi etkileyen değişken $\boldsymbol{\alpha}$ için hangi değerin kullanılacağı önemlidir. Yumuşatmanın amacı sıçramalarda görülen Gibbs etkisini gidermek olduğunda bunu sağlarken aynı zamanda yakınsamayı olumsuz etkilemeyecek en uygun $\boldsymbol{\alpha}$ değerini bulmak gereklidir. $\boldsymbol{\alpha}$ bu değerden küçük seçildiğinde salınım giderilemediği, büyük seçildiğinde ise yakınsamanın daha yavaşladığı gözlemlenir. Bu özelliğe örnek olarak basamak fonksiyonu ve düzgünleştirilme yapılmış Fourier serisinin grafikleri Şekil-1'de gösterilmiştir.



Şekil 1. Basamak fonksiyonu ve düzgünleştirilmiş Fourier serisi

4. Sonuç

Hermite-Spline interpolasyonunda eğer spline olarak 3. dereceden polinomlar seçilirse interpolasyonun 1. türevi sürekli olmakta fakat 2. ve 3. türevlerinde süreksizlikler meydana gelmektedir. Bu interpolasyon için hesaplanan Fourier serisinin 2. ve 3. türevleri sürekli olmakta fakat süreksizlik noktaları civarında salınımlar meydana gelmektedir. Fourier katsayıları düzgünleştirmeye tabi tutulduğunda salınımlar giderilebilmiş ve daha düzgün bir yakınsama sağlanabileceği gösterilebilmiştir.

Bu çalışmanın devamında daha hızlı yakınsama sağlayacağı düşünülen $e^{-\alpha|m|^2}$ gibi düzgünleştirme çarpanlarının kullanılması planlanmaktadır. Elde edilen düzgünleştirilmiş kapalı eğri ifadelerinin iki boyutlu saçılma probleminin integral denklem çözümünde kullanılması ile elde edilen sonuçların, yakınsama ve hız bakımından bilinen sonsuz düzgün parametrizasyonlar (ör. Süperformül [4]) kullanılması ile elde edilen sonuçlarla kıyaslanması sonraki aşama olacaktır.

Alınan Destekler

Bu çalışma TÜBİTAK 114E927 numaralı araştırma projesince desteklenmektedir.

Kaynaklar

[1]. Tuchkin Y. A., Suvorova O. A., ve Dikmen F., "Super-algebraically convergent mathematical model of hollow waveguides by Analytical Regularization Method", International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW), s.1-3, Haziran 2010.

[2]. Ahlberg J. H., Nilson E. N., ve Walsh J. L., The Theory of Splines and Their Applications, Academic Press, Inc., New York, A.B.D., 1967.

[3]. Tikhonov A. N., ve Arsenin V. Y., Solutions of ill-posed problems, John Wiley & Sons, Inc., Washington, D.C., A.B.D., 1977.

[4]. Gielis J., "A generic geometric transformation that unifies a wide range of natural and abstract shapes", American Journal of Botany, cilt.90 no.3, s.333-338, 2003.