

İki Boyutta Manyetik Alan İntegral Denkleminin Tüm Bölge Galerkin Yöntemi ile Çözümleri

Emrah Sever, Yury A. Tuchkin, Fatih Dikmen
Gebze Teknik Üniversitesi Üniversitesi
Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kocaeli

emrahsever@gtu.edu.tr, yury.tu@gmail.com, dikmen@gtu.edu.tr

Özet: İki boyutta teğet manyetik/elektrik durumların ikisinde de Fredholm ikinci tip bir integral denklemi olarak ve sadece kapalı sınırlar için yazılabilen manyetik alan integral denkleminin anılan durumlardaki sınır koşulları altında çözümünü konu edilmektedir. Düzgün kapalı bir eğri ve ilgili sınır koşulu için bu denklemin çözümünü tüm bölge Galerkin yöntemi temelinde işlenecek ve sayısal çözümleri için gereken uygulama sunulacaktır.

Abstract: For two dimensional transverse magnetic/electric cases both, emerging as an integral equation of the Fredholm's second kind and being only valid for closed boundaries, the magnetic field integral equation's solutions under corresponding boundary conditions are under consideration. With a smooth contour and corresponding boundary conditions, solution of this equation will be elaborated on the basis of entire domain Galerkin procedure and its numerical solution will be presented.

1. Giriş

Kartezyen z doğrultusuna dik iki boyutta elektromagnetik dalgaların kapalı düzgün bir eğrinin ifade ettiği mükemmel elektrik iletken bir sınırdan saçılması sırasında, alanların sadece kesite teğet manyetik/elektrik (TM/TE) biçimde olduğu durumlar ayrı ayrı incelenir ve her iki durumda da manyetik alan integral denklemleri ile karşılaştırılır [1]. Bu denklemler manyetik alanın eğri boyunca kesite teğet (l)/normal (z) bileşenlerini eşitler:

$$\alpha K_{\tau} - \frac{i}{4c} \int K_{\tau}' \frac{\partial H_0^{(2)}(kR)}{\partial v} dl' = H_9^{gelen} \quad (1)$$

Burada anılan durumlar için (1)'de k ortamın dalga sayısını, R gözlem ve kaynak noktaları arasındaki uzaklığı, K bilinmeyen yüzeysel akım yoğunluğunu, H_9^{gelen} gelen elektromanyetik alanın yüzeydeki değerini temsil eder ve görülen indisler, $\alpha: (+/-)0.5$, $\tau: z/l$, $v: n/n'$, $\vartheta: l/z$, olarak alınır (eğri üzerinde n : gözlem noktasının, n' : kaynak noktasının dışı doğru normal yönleri)[1]. Buradaki integral operator Fredholm ikinci tiptedir ve nümerik olarak değerlendirmeye en elverişli olanı olarak bilinir. Çünkü ayrıklaştırılması sonucunda varılan sonsuz matris sistemi tersinin alınmasına duyarlıdır ve çözümü sırasında yuvarlatma hatalarına yol açmayan bir yapısı vardır. Buna karşılık sadece kapalı sınırlar için yazılabilir olması, uygulanmasında bir kısıtlama unsurudur. Yine de kapalı düzgün eğrilerin sınırladığı cisimlerden saçılma problemlerinde, anılan yararlar bakımından önemli bir yere sahiptir. Bu çalışmada $(-\pi, \pi]$ aralığında bir parametrizasyon ile verilen kapalı düzgün eğri üzerinde, (1) denklemindeki fonksiyonlar gözlem ve kaynak noktalarının eğri parametrelerine göre Fourier serilerine açılarak, adeta bilinmeyen akım, karmaşık üstel tüm-bölge temelinde seriye açılmış ve denklem yine karmaşık üstel fonksiyon ile ağırlıklandırılarak ayrıklaştırılmış olur. Bu da tüm-bölge Galerkin yöntemi olarak nitelenebilir bir yöntemdir.

2. Denklemin Ayrıklaştırılması

İntegral denklemin Galerkin yöntemi ile çözümü için öncelikle (1) denkleminin çekirdeğinin düzgün ve tekil kısımlarına ayrıştırılması ve tekilliğe denk analitik ifadeler ile düzgünleştirilmesi gerekmektedir. Bu sayede, integral denklem, düzgün fonksiyonların iki boyutlu Fourier seri açılımları yardımı ile sonsuz bir cebrik denklem sistemine indirgenir [2]-[3]. Daha sonra bu sonsuz cebrik denklem sistemi kesilerek nümerik olarak çözülür. İntegral denklemin çekirdeğini oluşturan Hankel fonksiyonunun normale göre türevi aşağıdaki forma sahip olacaktır.

$$\frac{\partial H_0^{(2)}(kR)}{\partial v} = -kH_1^{(2)}(kR) \frac{\vec{R} \cdot \hat{v}}{|\vec{R}|} = -k(J_1(kR) - iY_1(kR)) \frac{\vec{R} \cdot \hat{v}}{|\vec{R}|} \quad (2)$$

Bundan sonraki kısımlarda TM problemi dikkate alınarak çözüm adımları açıklanacaktır. TE durumunda $\partial n \rightarrow \partial n'$ alınarak aynı aşamalar gerçekleştirilebilir.

(2) denkleminde yer alan $J_1(kR)$ fonksiyonu düzgün bir fonksiyon iken $Y_1(kR)$ fonksiyonu $R \rightarrow 0$ için logaritmik ve $1/R$ tekilliklerine sahiptir:

$$Y_1(kR) = \frac{-2}{\pi kR} + \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{kR}{2}\right) J_1(kR) + kR \text{ nin tek kuvvetleri} \quad (3)$$

Ancak (3) denklemindeki $Y_1(kR)$ fonksiyonun (2) uyarınca $\vec{R} \cdot \hat{v} / R$ terimi ile çarpılması sonucu $1/R$ tekilliği ortadan kalkar ve $\vec{R} \cdot \hat{v} / R^2$ ifadesi $R \rightarrow 0$ için bir limit değere ulaşır. Diğer tüm terimler $R \rightarrow 0$ için sıfıra gider. (3) denklemindeki ikinci terimin hesabı sırasında logaritma ifadesi yerine $R \rightarrow 0$ için benzer tekilliğe sahip olan ve Fourier serisi katsayıları analitik olarak bilinen $\ln\left|2\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\right|$ fonksiyonu kullanılacaktır. Bu terimin uygun şekilde eklenmesi ve çıkarılması sonucu (3) ifadesi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$Y_1(kR) = \frac{-2}{\pi kR} + \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{kR/2}{\left|2\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\right|}\right) J_1(kR) + \frac{2}{\pi} \ln\left(\left|2\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\right|\right) J_1(kR) + kR \text{ nin tek kuvvetleri} \quad (4)$$

Yeni durumda (4) denklemindeki ikinci terimde yer alan logaritmik ifade $R \rightarrow 0$ bir limit değere gider ve tekillik içermez. (1) denkleminin integrandı, bilinmeyen fonksiyon hariç olmak üzere düzgün ve tekil kısımlar olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$kH_1^{(2)}(kR) \frac{\vec{R} \cdot \hat{n}}{R} \ell(\theta') = \tilde{H}(kR) \frac{\vec{R} \cdot \hat{n}}{R} k\ell(\theta') + \frac{2}{\pi} \ln\left(\left|2\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\right|\right) J_1(kR) \frac{\vec{R} \cdot \hat{n}}{R} k\ell(\theta') \quad (5)$$

Burada $dl' = \ell(\theta')d\theta'$ ve $\ell(\theta) = \{x'(\theta)+y'(\theta)\}^{1/2} \geq 0$ olarak tanımlanmış ve yay uzunluğunu göstermektedir. $x(\theta)$, $y(\theta)$ ise eğrinin parametrisasyonu ile elde edilen x , y noktalarını ifade etmektedir. (5) denklemindeki fonksiyonların iki boyutlu Fourier seri açılımları ile bilinmeyen fonksiyon ve sağ yanın bir boyutlu Fourier serisi açılımları aşağıdaki tanımlanır.

$$\tilde{H}(kR) \frac{\vec{R} \cdot \hat{n}}{R} k\ell(\theta') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} h_{np} e^{i(n\theta+p\theta')}, \quad J_1(kR) \frac{\vec{R} \cdot \hat{n}}{R} k\ell(\theta') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} j_{np} e^{i(n\theta+p\theta')} \quad (6)$$

Benzer şekilde bilinmeyen fonksiyon ve sağ yanın bir boyutlu Fourier seri açılımları ise aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$K_z(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z_m e^{im\theta}, \quad H_1(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{in\theta} \quad (7)$$

Ayrıca $\theta \rightarrow \theta'$ için logaritmik tekillik içeren fonksiyonun Fourier seri açılımı ve analitik Fourier katsayıları aşağıdaki gibidir [3].

$$\ln\left|2\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in(\theta-\theta')}, \quad a_n = -\frac{1}{2|n|}, \quad a_0 = 0 \quad (8)$$

(5) denklemindeki tekil ve düzgün fonksiyonların çarpımından oluşan ikinci teriminin Fourier serisi katsayıları, bu fonksiyonların Fourier serisi katsayılarının konvolusyonu ile elde edilir. (6 – 8) serileri (1) denkleminde yerine konularak ve kompleks üstellerin ortogonalite özelliği kullanılarak elde edilen sistemde Fourier serisi katsayılarının eşitliğinden aşağıdaki sonsuz cebrik denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözümlenerek yüzey akımının Fourier serisi katsayıları elde edilir.

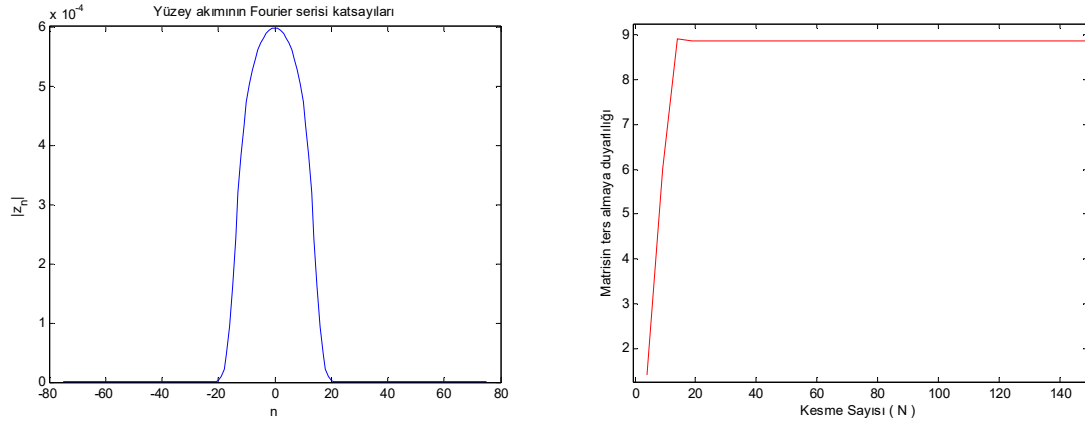
$$c[z_n]_{N \times 1} + \frac{i\pi}{2} \left([h_{n,-p}]_{N \times N} + \frac{2}{\pi} [a_{nn}]_{N \times N} * [j_{n,-p}]_{N \times N} \right) [z_n]_{N \times 1} = [g_n]_{N \times 1}, \quad n, p = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (9)$$

Herhangi bir şekilde sahip saçıcı için elde edilen yukarıdaki sistem nümerik olarak çözülecektir. Ancak a yarıçaplı bir dairesel silindir için bu eşitlik analitik olarak elde edilebilir ve karşılaştırma amaçlı kullanılabilir. Bu amaçla iki tür yaklaşım yapılarak dairesel silindir için (1) denkleminin hesabı analitik olarak elde edilmiştir. Bu iki yaklaşımın temelinde (1) in çekirdeğini oluşturan $H_0^{(2)}(kR)$ fonksiyonu, Bessel fonksiyonlarına ilişkin toplamsallık teoremi [4] uyarınca dairesel sınırın çok yakın bir h civarında sonsuz seriye açılmış ve daha sonra h 'a göre türevi alınmıştır. Dairesel silindir durumunda fonksiyonlar $\theta - \theta'$ nün fonksiyonları olacağından $\partial H_0^{(2)}(kR)/\partial n$ fonksiyonun Fourier serisi katsayıları, $r=a+h$ olmak üzere, $J_n(ka)H_n^{(2)'}(kr)$ olacaktır. Bu

yaklaşımlardan ilkinde $J_n(ka)$ ve $H_n^{(2)'}(kr)$ fonksiyonlarının sonsuz seri açılımlarından [4] küçük argüman yaklaşımı yapılarak argümanın $(ka)^3$ 'e kadar olan terimleri alınarak (1) denkleminde yerine konulmuştur. Bu durumda sistemi oluşturan fonksiyonlar yakınsak olduğundan sistem sınırın üzerinde çözülmüştür. Sonuç olarak da Fourier serileri katsayıları için analitik bir ifade elde edilmiştir. İkinci bir yaklaşım olarak da, yine toplamsallık teoremi sonucu elde edilen $J_n(ka)H_n^{(2)'}(k(a+h))$ Fourier katsayıları hesaba katılmıştır. Ancak bu durumda bu çarpım ıraksak olacağından doğrudan $h \rightarrow 0$ yapılarak sistem sınır üzerine indirgenemez. Bu sebeple öncelikle $J_n(ka)$ ve $H_n^{(2)'}(k(a+h))$ fonksiyonlarının sonsuz seri açılımlarından $n \rightarrow \infty$ için asimptotik ifadeleri alınarak çarpımın limit değeri olarak hesaplanan λ_n , $J_n(ka)H_n^{(2)'}(k(a+h))$ çarpımından çıkarılır ve eklenir. Bu durumda $J_n(ka)H_n^{(2)'}(k(a+h)) - \lambda_n$ değeri yakınsak olacağından, $h \rightarrow 0$ yapılarak sistem sınır üzerine indirgenir. Eklenen λ_n değeri ise integral dışına çıkarak dairesel silindir için (1) denkelmindeki αK_r ifadesine karşılık düşen terimi oluşturur. Böylelikle dairesel silindir için yine Fourier serilerinin eşitliğinden analitik bir ifade elde edilir ve bu yeni sistem (9)'daki sistem ile birebir karşılaştırılabilir bir sistem olur.

3. Sayısal Sonuçlar

(1) denkleminin, λ dalga boyu olmak üzere, $a=2\lambda$ yarıçaplı dairesel silindir için çözülmesi sonucunda elde edilen yüzey akımı [5]'te verilen yüzey akımı grafiği ile karşılaştırılmış ve birebir aynı sonuç elde edilmiştir. Şekil 1 (solda) bu yüzey akımının Fourier katsayılarının davranışı gösterilmiştir. Bu davranış, beklendiği gibi çok hızlı azalan bir yapıya sahiptir. Ayrıca bu sistem için matrisin ters almaya duyarlılığı (condition number) Şekil 1 (sağda) gösterilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere kesme sayısına göre elde edilen duyarlılık sayısı (1)'deki gibi ikinci tip Fredholm integral denkleminin yol açtığı, ikinci tip bir sistemin [3] özelliğini göstermektedir.



Şekil 1. Solda: Sistemin çözümünün Fourier katsayıları Sağda: Matrisin ters almaya duyarlılığı.

4. Sonuç

İki boyutta TM/TE durumların ikisinde de Fredholm ikinci tip bir integral denklemini olarak ve sadece kapalı sınırlar için yazılabilen manyetik alan integral denkleminin düzgün kapalı bir eğri ve ilgili sınır koşulu için çözümü, Galerkin yöntemi temelinde verilmiş ve sayısal sonuçlar ile bu tip bir sistemin ters almaya duyarlı olmadığı gösterilmiştir. TM için verilen çözüm adımları kolayca TE için de yazılabilir durumdadır. Farklı parametrik eğrilerin temsil ettiği sınırlardan saçılma problemleri de sunumda konu edilecektir.

Alınan Destekler

Bu çalışma TÜBİTAK 114E927 numaralı araştırma projesince desteklenmektedir.

Kaynaklar

- [1]. Morita N, Kumagai N, ve Mautz J. R., Integral Equation Methods for Electromagnetics. Artech House, Inc., Boston, London, 1990.
- [2]. F. Q. Hu, "A Spectral Boundary Integral Equation Method for 2D Helmholtz Equation". 1994.
- [3]. Poyedinchuk A. Y., Tuchkin Y. A., ve Shestopalov V. P., "New Numerical-Analytical Methods in Diffraction Theory", Math. & Comp. Modeling, cilt. 32, s. 1029-1046, 2000.
- [4]. Abramowitz M., ve Stegun I. A., Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Dover Publications, New York, 1972.
- [5]. Gibson W. C., The Method of Moments in Electromagnetics. Chapman & Hall/CRC, 2008.