

Empedans Yüklü Paralel Plakalı Dalga Kılavuzlarından Düzlemsel Dalgaların Kırınımı

Alinur Büyükaksoy, Gökhan Çınar *
Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü
Matematik Bölümü
Çayırova, Gebze, Kocaeli
alinur@gyte.edu.tr

* Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü
Elektronik Mühendisliği Bölümü
Çayırova, Gebze, Kocaeli
gokhan@gyte.edu.tr

Özet: Bu çalışmada, empedans yüklü paralel plakalı dalga kılavuzlarından düzlemsel dalgaların kırınımı problemine iki farklı yaklaşım getirilmiş ve bu yaklaşımlarla elde edilen sonuçlar birbirleriyle karşılaştırılmıştır. İlk yaklaşımda iki parçalı bir empedans düzlem ile ona paralel mükemmel iletken bir yarım düzlemden oluşan bir empedans yüklü paralel plakadan kırınım Fourier dönüşümüne dayalı doğrudan formülasyon ile incelenmiştir. Bu formülasyon ile elde edilen matris Wiener-Hopf denkleminde, çekirdek matrisin elemanları alt ve üst yarı-düzlemlerde regüler olan ve determinantları sıfırdan farklı çarpanlara ayrılması gerekmiştir. Matrislerin çarpımında “zayıf faktörizasyon” kavramına dayalı yöntem uygulanmış ve sonuçlar elde edilmiştir. İkinci yaklaşımda ise iki parçalı bir empedans düzlem ile her bir yüzü farklı empedans sınır koşullarına sahip bulunan bir yarım-düzlemden oluşan empedans yüklü paralel plakalı dalga kılavuzundan düzlemsel dalgaların kırınımı incelenmiştir. Burada doğrudan formülasyon ile yalnızca Fourier dönüşümü tekniği değil, ona ek olarak dalga kılavuzunun oluştuğu bölgelerde alan ifadesinin modlar cinsinden ifade edilmesini de göz önünde bulunduran hibrid bir yöntemden faydalanılmıştır. Formülasyondaki bu farklılık matris Wiener-Hopf denklemleri yerine dekuple iki skaler Wiener-Hopf denkleminin elde edilmesini sağlamış ve bu denklemler bilinen prosedür ile çözülmüştür. Elde edilen çözüm sonsuz sayıda bilinmeyen katsayı içeren sonsuz sayıda denklemden oluşan bir lineer denklem sistemine bağlıdır. Öncelikle bu denklem sisteminin çözülmesi ve sonrasında bulunan katsayıların alanlara ilişkin ifadelerde yerlerine konmasıyla kırınan alan hesaplanmıştır. Sonuçlar grafiksel olarak da incelenmiştir.

Çalışma sonunda bu iki yaklaşımın tutarlılığı da hem analitik olarak hem de grafiksel olarak gözlenmiştir.

1. Giriş

Bu çalışmada, empedans yüklü paralel plakalı dalga kılavuzlarından düzlemsel dalgaların kırınımı problemine iki farklı yaklaşım getirilmiş ve bu yaklaşımlarla elde edilen sonuçlar birbirleriyle karşılaştırılmıştır.

İlk yaklaşımda iki parçalı bir empedans düzlem ile ona paralel mükemmel iletken bir yarım düzlemden oluşan bir empedans yüklü paralel plakadan kırınım Fourier dönüşümüne dayalı doğrudan formülasyon ile incelenmiştir. Bu formülasyon ile elde edilen matris Wiener-Hopf denkleminde, çekirdek matrisin elemanları alt ve üst yarı-düzlemlerde regüler olan ve determinantları sıfırdan farklı çarpanlara ayrılması gerekmiştir. Matrislerin çarpımlarının karşılıklılık ilkesine sahip bulunmaması nedeniyle bu işlem için geliştirilmiş herhangi bir genel yöntem yoktur. Ancak bu konuda önemli ölçüde gelişme kaydedilmiş ve çarpanlarına ayrılması gereken matrislere ilişkin belirli özelliklere bağlı olarak üç farklı özel yöntem geliştirilmiştir. Bu çalışmada, bunların arasından İdemem [1] ve Abrahams'ın [2] önermiş oldukları “zayıf faktörizasyon” kavramına dayalı yöntem uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar grafiksel olarak da incelenmiştir.

İkinci yaklaşımda ise iki parçalı bir empedans düzlem ile her bir yüzü farklı empedans sınır koşullarına sahip bulunan bir yarım-düzlemden oluşan empedans yüklü paralel plakalı dalga kılavuzundan düzlemsel dalgaların kırınımı incelenmiştir. Burada doğrudan formülasyon ile yalnızca Fourier dönüşümü tekniği değil, ona ek olarak dalga kılavuzunun oluştuğu bölgelerde alan ifadesinin modlar cinsinden ifade edilmesini de göz önünde bulunduran hibrid bir yöntemden faydalanılmıştır. Formülasyondaki bu farklılık matris Wiener-Hopf denklemleri yerine dekuple iki skaler Wiener-Hopf denkleminin elde edilmesini sağlamış ve bu denklemler bilinen prosedür ile çözülmüştür. Elde edilen çözüm sonsuz sayıda bilinmeyen katsayı içeren sonsuz sayıda denklemden oluşan bir lineer denklem sistemine bağlıdır. Öncelikle bu denklem sisteminin çözülmesi ve

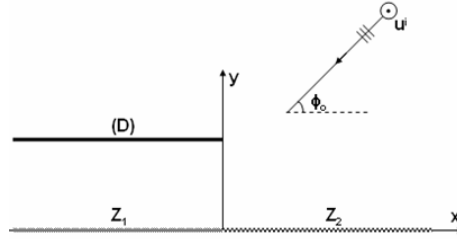
sonrasında bulunan katsayıların alanlara ilişkin ifadelerde yerlerine konmasıyla kırılan alan hesaplanmıştır. Sonuçlar grafiksel olarak da incelenmiştir. Çalışma boyunca elektromagnetik dalgaların zaman bağımlılığı $e^{i\omega t}$ olarak kabul edilmiştir.

2. Matris Wiener-Hopf Formülasyonu

Şekil 1'de görülen sistemi

$$E_z^i = u^i = \exp[-ik(x \cos \phi_o + y \sin \phi_o)] \quad (1)$$

ile gösterilen E-polarize düzlemsel dalga aydınlatmaktadır.



Şekil 1. Problemin geometrisi.

Toplam alan

$$u^T(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y) + u^i(x, y) + u^r(x, y) & , y > b \\ u_2(x, y) & , 0 < y < b \end{cases} \quad (2)$$

$$u^r(x, y) = -\exp\{-ik[x \cos \phi_o - (y - 2b) \sin \phi_o]\} \quad (3)$$

şeklinde ifade edildiğinde,

$$K(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2} \quad (4)$$

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L A(\alpha) e^{iK(y-b) - i\alpha x} d\alpha \quad (5)$$

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L [B(\alpha) \cos Ky + C(\alpha) \sin Ky] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (6)$$

$$\Phi_1^+(\alpha) = \int_0^\infty u_1(x, b) e^{i\alpha x} dx \quad (7)$$

$$\Phi_2^+(\alpha) = \int_0^\infty \left(1 + \frac{\eta_1}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_1(x, b) e^{i\alpha x} dx \quad (8)$$

$$\Phi_1^-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{\partial}{\partial y} u_1(x, b) - \frac{\partial}{\partial y} u_2(x, b)\right] e^{i\alpha x} dx \quad (9)$$

$$\Phi_2^-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 \left(1 + \frac{\eta_2}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_1(x, b) e^{i\alpha x} dx \quad (10)$$

ile Fourier dönüşümü tekniği uygulandığında ve şekilden de görülebilecek birinci ve üçüncü-türden sınır koşulları, süreklilik bağıntıları, ayırıt ve radyasyon koşulları gözönüne alındığında problem aşağıdaki iki denklemin çözümüne indirgenmektedir.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -\eta_2 \cos Kb + ik \frac{\sin Kb}{K} \\ ik & \eta_2 K \sin Kb + ik \cos Kb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1^+(\alpha) \\ \Phi_2^+(\alpha)/(\eta_2 - \eta_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \eta_1 \cos Kb - ik \frac{\sin Kb}{K} \\ -1 & \eta_1 K \sin Kb + ik \cos Kb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1^-(\alpha) \\ \Phi_2^-(\alpha)/(\eta_2 - \eta_1) \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{\alpha - k \cos \phi_o} \end{aligned}$$

(11)

Bu denklemlerde görülen terimler

$$M(\eta_j, \alpha) = \frac{\sin Kb}{K} - \frac{\eta_j}{ik} \cos Kb \quad (12)$$

$$N(\alpha) = M(\eta_2, \alpha) e^{ikb} \quad (13)$$

$$L(\alpha) = \frac{M(\eta_1, \alpha)}{M(\eta_2, \alpha)} \quad (14)$$

ile tanımlıdır. Bu denklemler “zayıf faktörizasyon kavramına dayalı” yöntem ile çözüldüğünde

$$\begin{aligned} M(\eta_1, \pm\alpha_m) &= 0, \quad \Im m(\alpha_m) > \Im m(k), \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ M(\eta_2, \pm\beta_m) &= 0, \quad \Im m(\beta_m) > \Im m(k), \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

$$b_m = \frac{N^+(\beta_m)}{M^+(\eta_2, \beta_m)L^+(\beta_m)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{\beta_m + \beta_n} - \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{\beta_m - k \cos \phi_o} N^-(k \cos \phi_o) \right] \quad (16)$$

$$d_m = \frac{N^+(\beta_m)}{M^+(\eta_2, -\beta_m)L^+(\beta_m)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\beta_m + \beta_n} \quad (17)$$

olmak üzere $\Phi_1^+(\alpha)$ için

$$\Phi_1^+(\alpha) = \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} N^-(k \cos \phi_o) N^+(\alpha) - N^+(\alpha) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m}{\alpha + \beta_m} \quad (18)$$

çözümü elde edilir. Sonuç olarak kırınan alan

$$\begin{aligned} u_1(\rho, \phi) &= -\frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{2k \sin \phi \sin \phi_o e^{-ikb(\sin \phi + \sin \phi_o)}}{(\cos \phi + \cos \phi_o)} N^-(k \cos \phi_o) N^-(k \cos \phi) \right. \\ &\quad \left. k \sin \phi e^{-ikb \sin \phi} N^-(k \cos \phi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m}{\beta_m - k \cos \phi} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

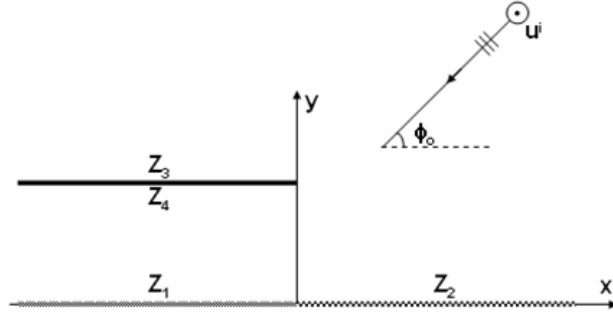
şeklinde bulunmuş olur.

3. Karma Formülasyon

Şekil 2’de görülen sistemi

$$E_z^i = u^i = \exp[-ik(x \cos \phi_o + y \sin \phi_o)] \quad (20)$$

ile gösterilen E-polarize düzlemsel dalga aydınlatılsın.



Şekil 2. Problemin geometrisi.

Toplam alan, değişik bölgelerde

$$u^T(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y) + u^i(x, y) + u^r(x, y) & , y > b \\ u_2(x, y)H(-x) + u_3(x, y)H(x) & , 0 < y < b \end{cases} \quad (21)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Burada

$$u^r(x, y) = \frac{\eta_3 \sin \phi_o - 1}{\eta_3 \sin \phi_o + 1} \exp\{-ik[x \cos \phi_o - (y - 2b) \sin \phi_o]\} \quad (22)$$

bağıl yüzey impedansı $Z_3 = \eta_3 Z_0$ olan düzlemden yansıyan dalgayı göstermektedir.

$0 < y < b$, $x < 0$ bölgesinde toplam alanı

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-i\beta_n x} \left[\frac{\sin \xi_n b}{\xi_n} - \frac{\eta_1}{ik} \cos \xi_n b \right] \quad (23)$$

biçiminde dalga kılavuzu modları cinsinden ifade edelim. Burada a_n ler henüz bilinmeyen açılım katsayılarını, ξ_n ler de

$$\frac{(\eta_1 + \eta_4)}{ik} \cos \xi_n b - \left(1 + \frac{\eta_1 \eta_4}{k^2} \xi_n^2 \right) \frac{\sin \xi_n b}{\xi_n} = 0 \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

denkleminin köklerini göstermektedir. β_n ler de.

$$\beta_n = \sqrt{k^2 - \xi_n^2} \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (25)$$

ile tanımlanmışlardır.

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x, y) e^{i\alpha x} d\alpha \quad G_+(\alpha) = \int_0^{\infty} u_3(x, y) e^{i\alpha x} d\alpha \quad (26,27)$$

olmak üzere, Mod-Uydurma yöntemi ve Fourier dönüşümü tekniği beraber uygulandığında ve şekilden de görülebilecek sınır-koşulları, süreklilik bağıntıları, ayırıt ve radyasyon koşulları gözönüne alındığında problem aşağıdaki Wiener-Hopf denkleminin çözümüne indirgenmektedir.

$$\frac{\chi(\eta_3, \alpha) P_+(\alpha)}{\chi(\eta_2, \alpha) N(\alpha)} + F'_-(\alpha, b) = \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\eta_3 \sin \phi_o + 1)(\alpha - k \cos \phi_o)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_m - i\alpha g_m)}{\alpha^2 - \alpha_m^2} \left(\cos K_m b + \frac{\eta_2}{ik} K_m \sin K_m b \right) \quad (28)$$

Burada $P_+(\alpha) = F_+(\alpha, b) + \frac{\eta_3}{ik} F'_+(\alpha, b)$ konmuştur.

Bu denklemde görülen $M(\alpha)$, $N(\alpha)$, $K(\alpha)$ ve $\chi(\eta_j, \alpha)$ fonksiyonları

$$M(\alpha) = \frac{(\eta_3 - \eta_2)}{ik} \cos Kb + \left(1 - \frac{\eta_2 \eta_3}{k^2} K^2\right) \frac{\sin Kb}{K} \quad N(\alpha) = M(\eta_2, \alpha) e^{iKb} \quad (30a,b)$$

$$K(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2}, \quad \chi(\eta_j, \alpha) = \frac{K(\alpha)}{\eta_j K(\alpha) + k} \quad (31a,b)$$

ile tanımlıdır. Bu denklem klasik Wiener-Hopf prosedürü ile çözüldüğünde

$$M(\pm \alpha_m) = 0, \quad \Im m(\alpha_m) > \Im m(k), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (32)$$

$$Q_m^2 = \frac{\left(\cos K_m b + \frac{\eta_2}{ik} K_m \sin K_m b\right)}{2K_m} \frac{\partial}{\partial K} M(\alpha) \Big|_{K=K_m} \quad (33)$$

$$P_+(\alpha_m) = -\left(\cos K_m b + \frac{\eta_3}{ik} K_m \sin K_m b\right) Q_m^2 (f_m - i\alpha_m g_m) \quad (34)$$

olmak üzere $P_+(\alpha)$ için

$$P_+(\alpha) = \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\eta_3 \sin \phi_o + 1)(\alpha - k \cos \phi_o)} \frac{\chi_-(\eta_2, k \cos \phi_o) N_-(k \cos \phi_o)}{\chi_-(\eta_3, k \cos \phi)} \frac{\chi_+(\eta_2, \alpha) N_+(\alpha)}{\chi_+(\eta_3, \alpha)} \quad (35)$$

$$- \frac{\chi_+(\eta_2, \alpha) N_+(\alpha)}{\chi_+(\eta_3, \alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(f_m + i\alpha_m g_m)}{2\alpha_m (\alpha + \alpha_m)} \left(\cos K_m b + \frac{\eta_2}{ik} K_m \sin K_m b\right) \frac{\chi_+(\eta_2, \alpha_m) N_+(\alpha_m)}{\chi_+(\eta_3, \alpha_m)}$$

elde edilir.

Sonuç olarak kırınan alan

$$u_1(\rho, \phi) = -\frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{2k \sin \phi \sin \phi_o e^{-ikb(\sin \phi + \sin \phi_o)}}{(\eta_3 \sin \phi_o + 1)(\eta_3 \sin \phi + 1)(\cos \phi + \cos \phi_o)} \right.$$

$$\times \frac{\chi_-(\eta_2, k \cos \phi_o) N_-(k \cos \phi_o)}{\chi_-(\eta_3, k \cos \phi)} \frac{\chi_-(\eta_2, k \cos \phi) N_-(k \cos \phi)}{\chi_-(\eta_3, k \cos \phi)} \quad (36)$$

$$+ \frac{k \sin \phi e^{-ikb \sin \phi}}{(\eta_3 \sin \phi + 1)} \frac{\chi_-(\eta_2, k \cos \phi) N_-(k \cos \phi)}{\chi_-(\eta_3, k \cos \phi)}$$

$$\left. \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(f_m + i\alpha_m g_m)}{2\alpha_m (\alpha_m - k \cos \phi)} \left(\cos K_m b + \frac{\eta_2}{ik} K_m \sin K_m b\right) \frac{\chi_+(\eta_2, \alpha_m) N_+(\alpha_m)}{\chi_+(\eta_3, \alpha_m)} \right\}$$

şeklinde bulunmuş olur.

Bulunması gereken katsayılar f_m ve g_m , $x=0$, $0 < y < b$ bölgesindeki süreklilik ilişkisi sayesinde (23)'te görülen a_n katsayıları cinsinden yazılabilmektedir. Bu ilişki gözönüne alındığında, (34) ve (35)'in bir arada düşünülmesiyle aşağıdaki sonsuz bilinmeyenli lineer cebirsel denklem elde edilir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{nj} a_n = B_j \quad (36)$$

$$A_{nj} = \left(\cos K_j b - \frac{\eta_3}{ik} K_j \sin K_j b\right) (\alpha_j + \beta_n) \Delta_{nj}$$

$$- i \frac{\chi_+(\eta_2, \alpha_j) N_+(\alpha_j)}{\chi_+(\eta_3, \alpha_j)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\beta_n - \alpha_m) \Delta_{nm}}{2\alpha_m (\alpha_j + \alpha_m) Q_m^2} \left(\cos K_m b + \frac{\eta_2}{ik} K_m \sin K_m b\right) \frac{\chi_+(\eta_2, \alpha_m) N_+(\alpha_m)}{\chi_+(\eta_3, \alpha_m)} \quad (37)$$

$$B_j = \frac{2k \sin \phi_o}{(\eta_3 \sin \phi_o + 1)(\alpha_j - k \cos \phi_o)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_o}}{\chi_-(\eta_2, k \cos \phi_o) N_-(k \cos \phi_o)} \frac{\chi_+(\eta_2, \alpha_j) N_+(\alpha_j)}{\chi_+(\eta_3, \alpha_j)} \quad (38)$$

$$\Delta_{nm} = \frac{1}{\xi_n^2 - K_m^2} \left\{ \frac{\eta_1 - \eta_2}{ik} + \frac{\eta_3 + \eta_4}{ik} K_m \xi_n \left(\frac{\cos \xi_n b}{\xi_n} + \frac{\eta_1}{ik} \sin \xi_n b \right) \left(\frac{\cos K_m b}{K_m} + \frac{\eta_2}{ik} \sin K_m b \right) \right\} \quad (39)$$

Kaynaklar

- [1] M. İdemem, "A new method to obtain exact solutions of vector Wiener-Hopf equations", Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM), 59 (1979) 656-658.
[2] I.D. Abrahams, "Scattering of sound by two parallel semi-infinite screens", Wave Motion, 9 (1987) 289-300.