

EET'nin İleri Probleminin Elips Modelinde Analitik Yöntem ve Sınırlı Eleman Yöntemi (SEY) ile Çözümü

Kurtuluş Erinç Akdoğan, Atila Yılmaz, Birsen Saka
Hacettepe Üniversitesi
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Beytepe, Ankara

kurtulus@ee.hacettepe.edu.tr , ayilmaz@hacettepe.edu.tr, birsen@ee.hacettepe.edu.tr

Özet

Elektrik Empedans Tomografi (EET), vücuttaki herhangi bir bölgenin kesitinin iletkenlik dağılımının görüntüsü oluşturur. Hesaplamalar için kolaylık sağladığından, alınan kesit genellikle daire olarak kabul edilir. Ancak bu kabullenme, geri yapılandırma esnasında hatalara yol açmaktadır. Bu makalede, kesitler elips olarak kabul edilmektedir ve bu model için çeşitli analitik ve nümerik çözümler üretilmiştir. Analitik çözüm dairesel geometrideki klasik çözümü ve konformal dönüşüm yöntemini kullanan iki çözümden oluşmakta, nümerik çözümde ise sınırlı eleman yöntemi kullanılmaktadır.

1. Giriş

EET üzerine, yöntemin görüntüleyebilme kapasitesini azami düzeye çıkarabilmek için birçok araştırma yapılmıştır. Çalışmalarımıza temel oluşturan Isaacson ve Cheney'nin araştırmalarında, dairesel geometride, özdeş ve özdeş olmayan durumlar için yüzeyde oluşan gerilimler hesaplanmıştır[1]. Bu çalışmada kesit içersindeki ölçülebilecek en küçük yapının büyüklüğü de bulunmuştur[1]. Bu çalışmaların ortak noktası, hepsinin incelenen kesiti daire olarak varsaymasıdır. Ancak insan vücudundan alınan kesitlerin daireden daha çok elipse benzemesi nedeniyle, daire modelinin geri yapılandırma evresinde sorunlar çıkardığı bilinmektedir[2].

Bu çalışmada elips modeli temel alınarak, EET'nin ileri problemini çözmek için analitik ve nümerik çözümler incelenmektedir. Kesitin şeklinin elips olarak kabul edildiği hesaplamalarda, özdeş durum ve özdeş olmayan durumlar için yüzeydeki gerilim hesaplanabilmektedir[3]. İlk bölümde bu çözümler ele alınmaktadır. Bu iki durumdan birincisi tek bir elipsten oluşan özdeş yapı, ikincisi ise iki eş odaklı elipsten oluşan özdeş olmayan yapıdır. İkinci bölümde, analitik çözümü genişleten konformal dönüşüm yöntemi incelenmektedir. Bu yöntem tek elipsten oluşan özdeş duruma uygulanmaktadır ancak dönüşüm için gerekli dönüşüm fonksiyonlarının bulunması ile daha karmaşık durumlara uygulanabilir. Fakat şu an için çözüm sayısı yetersiz olması nedeniyle, daha genel bir çözüme ihtiyaç duyulmaktadır. Üçüncü bölümde, bu sorunu aşan ve çözüm zenginliği sunan sınırlı eleman yöntemi (SEY, finite element method (FEM)), incelenmektedir. Bu yöntem, daha genel sorunları çözmek için tasarlanan MATLAB PDETOOL'da gerekli değişiklikleri yaparak EET'nin ileri problemine uygulanmasını içermektedir.

2. Analitik Çözüm

İleri problem, kesitin yüzeyine tutturulan, eşit aralıklarla dizilmiş elektrotlardan uygulanan akım sonucu, iletkenlik dağılımı bilinen kesitin yüzeyinde oluşan gerilimin hesaplanmasıdır. Yüzeyi 'S' olan bir 'B' yapısının doğrusal iletken olduğu varsayılmakta ve B'deki iletkenlik dağılımı ' σ ' olarak gösterilmektedir. B'ye bir akım uygulandığında, herhangi bir noktada oluşacak gerilim ' U 'dur ve aşağıdaki Laplace denklemini ve sınır koşulunu sağlar. Bu denklemler dairesel geometriye uygulandığı gibi elips geometrisine de uygulanır. Analitik çözüm için uygulanan eş. 1'deki Laplace denkleminin değişken ayırma yöntemi, dairesel geometrikenine benzer bir şekilde elips geometrisinde de gerçekleştirilmektedir.

$$\nabla\sigma\nabla U = 0 \quad (\text{B'nin içinde}), \quad \sigma \frac{\partial U}{\partial n} = j \quad (\text{B'nin yüzeyinde}) \quad (1)$$

Elipsleri matematiksel olarak ifade etmek için elips silindir koordinat sistemi kullanılmaktadır[3]. Bu koordinat sistemi iki parametre ' ξ ' ve ' ν ' ile ifade edilmektedir. ξ ilgili elipsi, ν ise o elips üzerindeki noktanın açılma konumunu göstermektedir. İki durum için hesaplanan gerilim fonksiyonları aşağıda gösterilmiştir.

(yapı özdeş olduğunda)

$$V_1(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma|n|} j_n e^{jn\nu} \quad (2)$$

(yapının içinde özdeş olmayan dağılım olduğunda)

$$V_2(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \mu e^{-2n(\zeta_0 - \zeta_{in})})}{n(1 + \mu e^{-2n(\zeta_0 - \zeta_{in})})} e^{jnv} \quad (3)$$

$$\mu = (\sigma_{in} - \sigma) / (\sigma_{in} + \sigma)$$

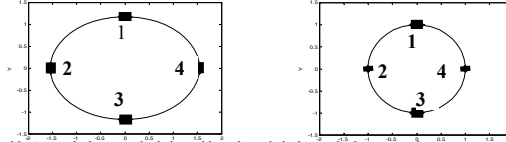
2.1 Konformal Dönüşüm Yöntemi

Isaacson'un birim özdeş daire için bulduğu ileri problemin çözümü [1], özdeş elipsin çözümü için kullanılabilir. Yapılması gereken dönüşüm fonksiyonunu bulmaktır. Bu fonksiyon eş.4'de gösterilmektedir. Bu dönüşüm eş. 5'te belirtilen özelliklere sahip elipsleri, birim daireye dönüştürebilmektedir. Bu dönüşüm fonksiyonu üç farklı dönüşüm fonksiyonunun bir bileşimidir [5].

$$f(z) = \sqrt{k} sn\left(\frac{2K}{\pi} \sin^{-1}(z)\right) \quad (4)$$

$$a^2 - b^2 = c^2 = 1, \quad a = \cosh(\tau), \quad b = \sinh(\tau) \quad (5)$$

Elips'in büyük eksen 'a', küçük eksen 'b' ve odağı 'c' ile gösterilmektedir. ' τ ' parametresi ise kullanıcıya bağlıdır. Bu parametre kullanılarak eliptik sn fonksiyonunun bilinmeyen 'k' ve 'K' katsayıları hesaplanmaktadır [4]. Belirlenen fonksiyon etkisi, şekil 1'de örnek olarak tasarlanmış dört elektrotlu bir düzenek üzerinde gösterilmektedir. Elipsin içine doğru göçtüğü ana eksen üzerindeki 2. ve 4. elektrotların dönüştükten sonra küçüldüğü gözlenmektedir. 1. ve 3. elektrotlarda ise değişim nispeten azdır.



Şekil 1: Birim odaklı elipsin, birim daireye dönüştürülmesi

Şekil 1'deki sonuçtan anlaşılacağı üzere değişim sadece büyüklükte sınırlı kalmamakta ve elektrotlar üzerindeki akım yoğunlukları da değişmektedir. Yeni akım yoğunlukları, Neumann sınır koşulları için tasarlanmış, eş.6 ile bulunmaktadır [6]. $f'(z)$, birim daireyi, birim odaklı elipse geri dönüştüren, geri dönüşüm fonksiyonudur. Asıl modele uygulanan akım yoğunluğu j ve dönüşüm sonrası elektrotlar üzerindeki akım yoğunluğu ise j_d olarak gösterilmektedir.

$$j_d(w) = |f'(z)| j(z) \quad (6)$$

3. Sınırlı Eleman Yöntemi (SEY)

SEY çözümü MATLAB PDETOOL faydalanarak çözülmüştür. PDETOOL, genel kullanım için tasarlandığından, EET'nin ileri problemini çözmek için özellikle incelenecek yapının çevresinde çeşitli değişikliklere ihtiyacı vardır. Örneğin 16 elektrot kullanan bir düzenekte, sınır 32 parçaya bölünmeli ve herbir parçadaki akım yoğunluğu PDETOOL'a tanıtılmalıdır [5]. Tanıtmak için 'pde-tool' iki giriş matrisini düzenlemek gerekmektedir. Bunlardan ilki, Ayrıştırılmış Geometri Matrisi (Decomposed Geometry Matrix), sınırdaki herbir parçayı bir sütununda tanımlar. İkinci matris, Sınır Koşulları Matrisi (Boundary Condition Matrice) ise herbir parçanın üzerindeki akım yoğunluğunu tutar.

4. Benzetimler

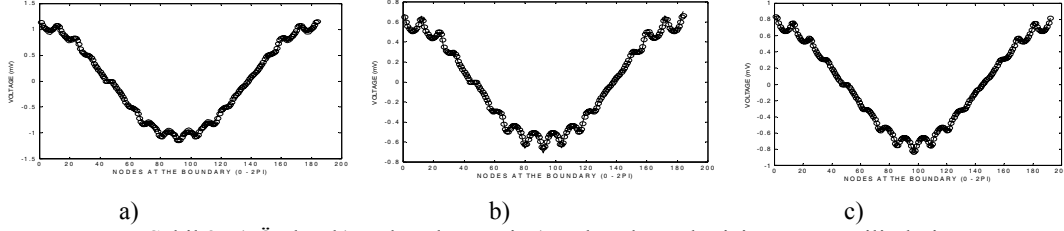
Özdeş ve özdeş olmayan iki durum incelenmektedir. Özdeş olmayan yapı da eş odaklı iki elipsten oluşmaktadır. Elips yapıları 16 tane elektrot kullanılarak akım verilmiştir. Kullanılan akım örüntüsü, birim büyüklükteki kosinüs akım örüntüsüdür. İlk benzetimde klasik analitik yöntem kullanılarak, yüzey gerilimleri bulunmaktadır. Bu çözümüm gerçekleştirildiği elipslerin özellikleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} a_{iç} &= \sqrt{0.52}, \quad b_{iç} = 0.4, \quad c_{iç} = 0.6, \quad \sigma_{iç} = 1 \Omega \text{cm}^{-1}, \quad 5 \Omega \text{cm}^{-1} \\ a_{dış} &= 1, \quad b_{dış} = 0.8, \quad c_{dış} = 0.6, \quad \sigma = 1 \Omega \text{cm}^{-1} \end{aligned} \quad (7)$$

SEY yüzey gerilimini, analitik çözümün yaptığı gibi sınırdaki devamlı olarak hesaplayamamasından ötürü, iki yöntem arasındaki karşılaştırma SEY'in sınırdaki gerilimi hesapladığı düğümlerde yapılmaktadır. Şekil 2a ve 2b, iki durum için iki yöntemin sonucunu göstermektedir. $0-2\pi$ arasındaki düğümler x ekseninde, bu düğümlere karşılık gelen gerilimler y ekseninde yer almaktadır. Sonuçlara göre iki yöntem birbirini sağlamaktadır.

İkinci benzetimde, SEY, klasik çözüm ile tutarlılık sağladıktan sonra konformal dönüşüm ile zenginleştirilen analitik çözüm ile karşılaştırılmaktadır. Bu benzetim için kullanılan elipsin özellikleri aşağıda verilmiştir. Seçilen elipsin odağı 1'e eşittir ve dönüşüm sonrası ortaya birim daire çıkmaktadır. Şekil 2c'ye göre SEY ve konformal dönüşüm yöntemi birbirini sağlamaktadır.

$$\tau=1, a=1.5431, b=1.1752, c=1, k=0.5041, K=1.688 \quad (8)$$



a) b) c)
Şekil 2: a) Özdeş b) özdeş olmayanı, c) özdeş durumlar için yüzey gerilimleri
(— : Analitik çözüm, 'o' : SEY çözümü)

5. Sonuç

Dairenin elipsin özel bir hali olması ve vücuttan alınan kesitlerin elipse daha yakın olması, EET'de elips modelin kullanılmasını gerektirmektedir. Ancak elips geometrisi daha karmaşık bir geometridir. Bu makalede, EET'nin ileri probleminin bu karmaşık geometride çözülebilmesi ve çözüm zenginliği sağlamak için daha önce geliştirilmiş klasik analitik çözümünden farklı olarak, konformal dönüşüm yöntemi denenmiştir. Bu yöntem gerekli dönüşüm fonksiyonları bulunduğu takdirde, yeni analitik çözümlere yol açabilmektedir. SEY'in ise herhangi bir geometri sınırlandırması yoktur. SEY'in sonuçları, analitik yöntemlerin sonuçları ile birbirini desteklemektedir. Fakat sonuçlardan görüldüğü üzere SEY'in gerilim değerlerinde bir miktar hata bulunmaktadır. Ancak hata miktarı, işlem yükü artırılarak düşürülebilir. İleriki çalışmalarda, farklı konformal dönüşüm fonksiyonlarının, özellikle eş merkezli olmayan eliptik yapıların çözümleri araştırılacak ve SEY'in bu geometriler için verdiği sonuçlar ile karşılaştırılacaktır.

6.Referanslar

- [1] Cheney M. ve Isaacson D. "Distinguishability in Impedance Imaging" *IEEE transactions on Biomedical Eng.*, Vol. 39, s. 852-860, 1992.
- [2] Jain H., Isaacson D., Edic P. ve Newell J. C. "Electrical Impedance Tomography of Complex Conductivity Distribution with Noncircular Boundary" *IEEE Trans. On Biomedical Eng.*, Vol. 44, s. 1051-1060, 1997.
- [3] Saka B. and Yılmaz A.. "Elliptic cylinder geometry for distinguishability analysis in impedance tomography", *IEEE Trans. On Biomedical Eng.* Vol. 51, s. 126-132, 2004.
- [4] Zeev Nehari "Conformal Mapping" ilk baskı McGraw-Hill 1952.
- [5] Kurtuluş Erinç Akdoğan, "Elektrik Empedans Tomografide (EET) İleri Problemin Elips ve Daire Geometrileri İçin Analitik Yöntem ve Sonlu Eleman Yöntemi ile İncelenmesi", yüksek lisans tezi, 2004
- [6] Köksal A. ve Eyüboğlu B. M., "Determination of Optimum Injected Current Patterns in Electrical Impedance Tomography", *Pysiol Meas* 16, s. A99-A109, 1995.