

Sonlu Elemanlar Yöntemi Ağ Sonlandırılmasında Kullanılan Yerel-uyumlu ve Çok-merkezli Tamamen Eşlenmiş Katman Yaklaşımları

Özlem Özgün* ve Mustafa Kuzuoğlu
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, ODTÜ, Ankara
oozgun@superonline.com, kuzuoglu@metu.edu.tr

Özet: Sonlu Elemanlar Yöntemi ağ sonlandırılmasında kullanılan yaygın yöntemlerden biri, ağı yansız yapay bir katman olan ve uzaklaşan dalgaları frekanslarına ve geliş açılarına bakmaksızın soğuran Tamamen Eşlenmiş Katman ile sonlandırmaktır. Bu bildiriye, Tamamen Eşlenmiş Katman tasarımında kullanılan yaklaşımlardan biri olan kompleks koordinat dönüşümünün yeni iki farklı uygulama yöntemi anlatılmaktadır. Bu yöntemler; “yerel-uyumlu” ve “çok-merkezli” Tamamen Eşlenmiş Katmanlar olarak adlandırılmıştır. Bu yaklaşımların başarısı, üç boyutlu elektromanyetik saçılım problemleri üzerinde test edilmiştir.

1. Giriş

Sonlu Elemanlar Yöntemi, karmaşık geometrik yapıda ve homojen olmayan materyal özelliklerine sahip üç boyutlu saçıcı cisimlerin yer aldığı açık-bölge elektromanyetik ışınım/saçılım problemlerini tanımlayan vektörel dalga denklemini çözümlenmekte kullanılan güçlü bir sayısal yöntemdir. Bu yöntemin ışınım/saçılım problemlerine uygulanabilmesi için, bu problemlerdeki sınırsız uzay bölgesinin yapay sınır veya katmanlarla sonlandırılması gerekmektedir. Sonlu Elemanlar Yöntemi ağ sonlandırılmasında kullanılan yaygın yöntemlerden biri, ağı yansız yapay bir katman olan ve uzaklaşan dalgaları frekanslarına ve geliş açılarına bakmaksızın soğuran Tamamen Eşlenmiş Katman (TEK) ile sonlandırmaktır. TEK’in en büyük avantajı, cismin yüzey şekline uygun ve cisme çok yakın olacak şekilde tasarlanabilmesi, ve bu sayede problemin hesaplama bölgesinin büyüklüğünün en aza indirilebilmesidir.

TEK yönteminin Sonlu Elemanlar Yöntemine uygulanmasında genel olarak iki yaklaşım bulunmaktadır. Bunlardan ilki, TEK’i, uygun sığallık ve manyetik geçirkenlik tensorlarıyla tanımlanan yön-bağımlı bir katman şeklinde tasarlamaktır [1-2]. Diğer yaklaşım ise, TEK’i kompleks koordinat dönüşümü ile gerçekleştirmektir [3]. Bu dönüşüm sayesinde, TEK’in cismin yüzey şekline uygun olarak tasarlanması oldukça kolay olmaktadır.

Bu bildiriye, kompleks koordinat dönüşümünün yeni iki farklı uygulama yöntemi anlatılmaktadır. Bu yöntemler; “yerel-uyumlu” ve “çok-merkezli” Tamamen Eşlenmiş Katmanlar olarak adlandırılmıştır, ve sırasıyla Bölüm 2 ve 3’de özetlenmiştir. Son olarak Bölüm 4’de ise, bu yaklaşımların başarısı üç boyutlu elektromanyetik saçılım problemleri üzerinde test edilmiştir. Bu yöntemlerin test edildiği tüm Sonlu Elemanlar Yöntemi simülasyonlarında, TEK, saçıcı cismin yüzey şekline uygun şekilde ve dışbükey olarak tasarlanmıştır.

2. Yerel-uyumlu Tamamen Eşlenmiş Katman (TEK) Yaklaşımı

Yerel-uyumlu TEK yaklaşımı, Şekil 1.a ile gösterilen saçılım problemi model alınarak açıklanmaktadır. Bu yaklaşımda, TEK bölgesi (Ω_{TEK}) yerel koordinat sisteminde (ξ, η, ν) parametreleriyle temsil edilmektedir. Bu koordinat sistemindeki ξ parametresi, TEK-serbest uzay arayüzüne dik olan yönü; \hat{a}_ξ ise ξ yönündeki birim vektörü göstermektedir. TEK bölgesi, $\xi=\xi_0$ ve $\xi=\xi_1$ yüzeyleri arasında kalan bölge olarak temsil edilmektedir. $\xi=\xi_0$ yüzeyi (S_i), TEK ile serbest uzay (Ω_{SU}) bölgeleri arasında kalan arayüzeyi göstermektedir. $\xi=\xi_1$ yüzeyi ise (S_o), TEK bölgesinin en dıştaki sınır yüzeyini göstermektedir, ve bu yüzey mükemmel elektrik veya manyetik iletkenlerle modellenmektedir. P noktası ise, TEK bölgesindeki herhangi bir noktayı göstermektedir.

Bu yaklaşımda, bir düzlem dalganın TEK-serbest uzay arayüzüne belirli bir yönde ve polarizasyonda geldiği düşünülmekte ve elektrik-alan denklemi $e^{j\omega t}$ zaman-bağımlılığı ile aşağıdaki denklemle gösterilmektedir.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{a}_p \exp[-jk\hat{a}_k \cdot \vec{r}] \quad (1)$$

Bu denklemde; k serbest uzay dalga sayısı, \hat{a}_k geliş açısı yönündeki birim vektör, \vec{r} konum vektörü, ve \hat{a}_p ise elektrik alanın polarizasyonunu gösteren birim vektördür.

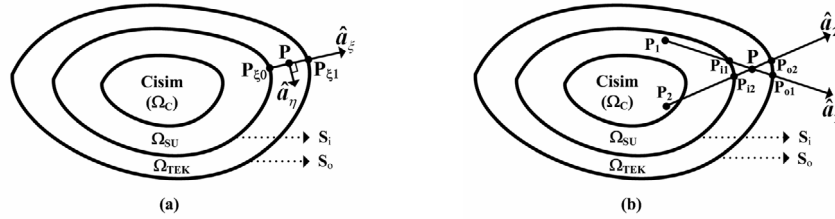
TEK tasarımının başarılı olabilmesi için, (1) ile gösterilen düzlem dalganın hiçbir yansıma olmadan TEK bölgesine iletilmesi gerekmektedir. Ayrıca, bu düzlem dalganın \hat{a}_ξ yönünde düzgün bir şekilde sönümlenmiş olması için, en dıştaki TEK sınır yüzeyine ulaştığındaki değeri gözardı edilebilir düzeyde olmalıdır. TEK bölgesi içindeki elektrik-alan denklemi, bu başarı kriterlerini sağlayacak şekilde aşağıdaki denklemle gösterilmektedir.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{a}_p \exp \left[-jk \hat{a}_k \cdot \left\{ \vec{r} + \frac{\alpha}{jk} \left[\frac{(\xi - \xi_0)^m}{m(\xi_1 - \xi_0)^{m-1}} \right] \hat{a}_\xi \right\} \right] \quad (2)$$

Bu denklemde; α pozitif bir parametre, ve m ise TEK bölgesindeki alan şiddetinin sönümlenme hızına bağlı pozitif bir tamsayıdır (tipik olarak 3 veya 2). Denklem (2)'deki kıvrımlı parantez içindeki ifade, kompleks koordinat dönüşümü olarak yorumlanmakta ve aşağıdaki denklemle ifade edilmektedir.

$$\vec{r}' = \vec{r} + \frac{\alpha}{jk} \left[\frac{(\xi - \xi_0)^m}{m(\xi_1 - \xi_0)^{m-1}} \right] \hat{a}_\xi \quad (3)$$

Denklem (3)'teki kompleks koordinat dönüşümü, herhangi bir Sonlu Elemanlar Yöntemi programında kolayca uygulanabilmektedir. TEK bölgesi içinde kalan düğüm noktalarındaki reel koordinatların, (3) ile hesaplanan kompleks karşılıklarıyla yer değiştirilmesiyle bu dönüşüm kolay bir şekilde gerçekleştirilebilmektedir.



Şekil 1. Tamamen Eşlenmiş Katman Yaklaşımları: (a) Yerel-uyumlu, (b) Çok-merkezli.

3. Çok-merkezli Tamamen Eşlenmiş Katman (TEK) Yaklaşımı

Çok-merkezli TEK yaklaşımı, Bölüm 2'de anlatılan yaklaşımın bir genellemesi olup, Şekil 1.b ile gösterilen saçılım problemi model alınarak açıklanmaktadır. Bu yaklaşımda, serbest uzay ve/veya cisim bölgesinde (Ω_C) bazı merkez noktaları seçilmekte, ve bu merkezlerden TEK bölgesi içindeki P noktasına doğru yönlendirilmiş birim vektörleri hesaplanmaktadır. Yaklaşımın basit gösterimi amacıyla, Şekil 1.b'deki gibi iki merkez (P_1 ve P_2) seçilmiştir. İlk olarak, bu iki merkezden P noktasına doğru yönlendirilmiş birim vektörleri (\hat{a}_1 ve \hat{a}_2) hesaplanmaktadır. Daha sonra, bu vektörlerin, TEK bölgesinin arayüzeylerini (S_i ve S_o) kestiği noktalar (P_{i1} , P_{o1} , P_{i2} and P_{o2}) hesaplanmaktadır. Son olarak, (3) ile ifade edilen yaklaşıma benzer şekilde, kompleks koordinat dönüşümü aşağıdaki denklemle ifade edilmektedir.

$$\vec{r}' = \vec{r} + \frac{\alpha}{jk} \sum_{n=1}^N w_n \frac{(d_{in})^m}{m(d_{on})^{m-1}} \hat{a}_n \quad (4)$$

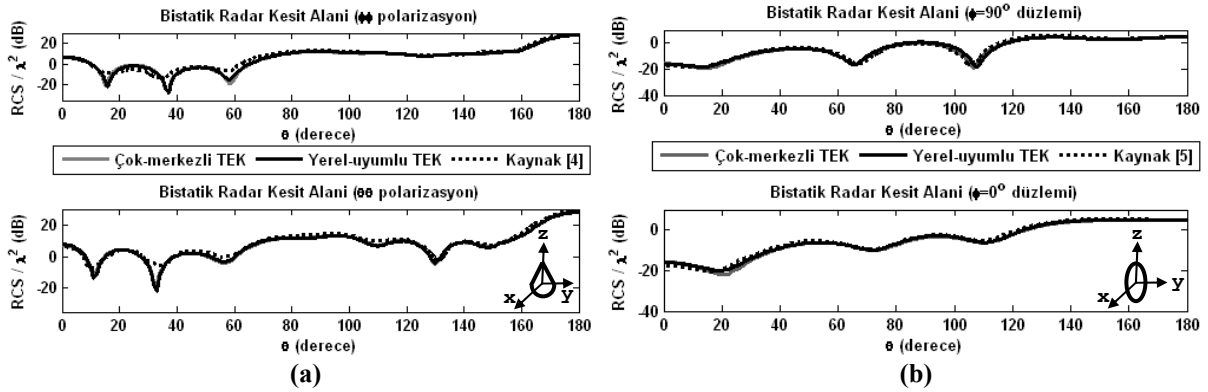
Bu denklemde; N merkezlerin sayısı, d_{in} P ile P_{in} arasındaki uzaklık (n 'inci merkez P_n için), d_{on} P ile P_{on} arasındaki uzaklık, ve w_n ise P_n 'e atanmış reel bir ağırlıktır. Bu ağırlıklar, toplamı 1 olacak şekilde seçilmektedir. Her bir ağırlığın değeri, \hat{a}_n (n 'inci birim vektör) ile P noktasındaki dik birim vektörü (Şekil 1.a'daki \hat{a}_ξ) arasındaki açıyla ters orantılı olacak şekilde hesaplanmaktadır. Bu ağırlık atama yaklaşımı, Yerel-uyumlu ve Çok-merkezli TEK yaklaşımları arasındaki ilintiyi ortaya koymaktadır. Şöyle ki; Çok-merkezli TEK yaklaşımında, rastgele seçilen bir P noktası için sonsuz uzaklıkta bir merkez seçilmesiyle, bu yaklaşım Yerel-

uyumlu TEK yaklaşımına dönüşmektedir. Bu ağırlık atama ile, TEK bölgesi içindeki elektrik alan şiddeti, merkezlere göre hesaplanmış birim vektörlerin (\hat{a}_n) ağırlıklandırılmış bileşkesi yönünde düzgün bir şekilde sönümlenmektedir.

Bu yaklaşımda merkezlerin sayısı ve konumlarının seçimi, TEK bölgesinin geometrisiyle doğrudan bağlantılıdır. Merkezler, TEK bölgesi içindeki alan şiddetinin düzgün bir şekilde sönümlenmesini ve en dıştaki TEK sınır yüzeyindeki değerinin ise gözardı edilebilmesini sağlayacak şekilde seçilmelidir. Bu amaçla, sivri köşelere sahip olmayan düzgün geometrilerde (örneğin; küre, küp), cismin ağırlık merkezi yakınlarında seçilen tek bir merkez başarılı sonuçlar sağlamaktadır. Sivri köşelere sahip olan geometrilerde ise, ağırlık merkezine ek olarak bu köşelere yakın bölgelerde daha fazla merkez seçerek başarılı sonuçlar elde etmek mümkün olmaktadır. Merkezlerin sayısı, Sonlu Elemanlar Yöntemi programının çalıştırılması sırasındaki gerekli olan işlemci gücünü ve bellek miktarını ihmal edilebilir düzeyde etkilemektedir.

4. Sonuçlar

Bu bölümde, Yerel-uyumlu ve Çok-merkezli TEK yöntemlerinin performansı, 3 boyutlu saçılım problemleri üzerinde test edilmektedir. Bu bölümdeki tüm örneklerde TEK, saçıcı cismin yüzey şekline uygun şekilde tasarlanmıştır. Simülasyonlarda kullanılan Vektör Sonlu Elemanlar Yöntemi yazılımında, yüzeyleri üçgen olan dört-yüzlü elemanlar kullanılmıştır. Ayrıca, tüm örneklerde dalgaboyu (λ) 0.1 metre, α ise $5k$ olarak tanımlanmıştır. İlk örnek, mükemmel iletken koniküredir. Konikürenin tepe açısı 90 derece, taban yarıçapı 1.6λ ve uzunluğu ise 1.6λ olarak tanımlanmıştır. Elemanların kenar uzunluğu yaklaşık $\lambda/10$ olarak seçilmiştir. Çok-merkezli TEK yönteminde, (0, 0, 0) noktası merkez olarak seçilmiştir. Düzlem-dalga, konikürenin burun kısmından ($-z$ eksen yönünde) gelmektedir. Konikürenin bistatik radar kesit alanı profili Şekil 2.a'da gösterilmektedir. İkinci örnek, mükemmel iletken uzatılmış-küresimsi (prolate-spheroid) cisimdir. Küresimsinin z -ekseni boyunca yarı-ana eksen uzunluğu 0.8λ , eksenler oranı ise 2 olarak tanımlanmıştır. Elemanların kenar uzunluğu yaklaşık $\lambda/20$ olarak seçilmiştir. Çok-merkezli TEK yönteminde, (0, 0, 0), (0, 0, 0.8λ) ve (0, 0, -0.8λ) noktaları merkez olarak seçilmiştir. Düzlem-dalganın polarizasyonu y -ekseni yönünde olup, dalga eksi z -ekseni yönünde ilerlemektedir. Küresimsinin bistatik radar kesit alanı profili Şekil 2.b'de gösterilmektedir.



Şekil 2. Bistatik Radar Kesit Alanı Profilleri: (a) Koniküre, (b) Küresimsi.

Kaynaklar

- [1]. Sacks Z.S., Kingsland D.M., Lee R., ve Lee J.-F., "A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, v.43, s.1460-1463, 1995.
- [2]. Kuzuoğlu M., ve Mittra R., "Investigation of nonplanar perfectly matched absorbers for finite-element mesh truncation," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, v.45, s.474-486, 1997.
- [3]. Chew W.C., Jin J.M., ve Michielssen E., "Complex coordinate stretching as a generalized absorbing boundary condition," Microwave Opt. Tech. Lett., v.15, s.363-369, 1997.
- [4]. Medgyesi-Mitschang L.N., ve Wang D.S., "Hybrid Solutions for Scattering from Perfectly Conducting Bodies of Revolution," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, v.AP-31, no:4, s.570-583, 1983.
- [5]. Sinha B.P., ve MacPhie R.H., "Electromagnetic Scattering from Prolate Spheroids for Axial Incidence," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, v.23, s.676-679, 1975.