

Rao-Wilton-Glisson Temel Fonksiyonlarının Potansiyel İntegrallerinin Zaman Uzayındaki Analitik İfadeleri

Abdulkadir C. Yücel, A. Arif Ergin
Elektronik Mühendisliği Bölümü
Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü
İstanbul Cad. No:101, 41400 Gebze, Kocaeli.
acyucel@gyte.edu.tr, aergin@gyte.edu.tr

Özet: Zamanda adımlama (MOT, *Marching-on-in-time*) yöntemi, mükemmel iletken cisimlerden elektromanyetik dalgaların zamana bağlı saçılımını incelemekte kullanılan yöntemlerden biridir. Bu yöntemde iletken cisim yüzeyinde indüklenen akımlar genellikle Rao-Wilton-Glisson (RWG) temel fonksiyonlarıyla ifade edilirler ve bu akımların oluşturduğu vektör ve skaler potansiyellerin hesaplanması gerekir. Şimdiye kadar bu potansiyeller nümerik olarak hesaplanmıştır. Bu çalışmada, RWG fonksiyonlarıyla gösterilen akımların oluşturduğu gecikmiş zaman potansiyeller için analitik ifadeler herhangi bir yaklaşıklık yapılmadan çıkarılacak ve sonuçların doğruluğu gösterilecektir. Bu çıkarımlar sırasında RWG fonksiyonunun gösterdiği akımın zamana göre değişimi hakkında herhangi bir kısıtlayıcı varsayım yapılmamıştır.

1. Giriş

Genel bir geometrik şekle sahip cisimlerden elektromanyetik dalga saçılma probleminin çözümü sayısal yöntemler ile yapılmaktadır. Saçılma probleminin analizi için tarihsel gelişimi [1]'de genişçe ele alınan zamanda adımlama (MOT; *Marching-on-in-Time*) yöntemi 1990'lerden sonra yaygın bir biçimde kullanılmaya başlanmıştır. MOT algoritması içerisinde en yoğun hesaplama, temel fonksiyonlar ile alakalı potansiyel integrallerinin sayısal olarak hesaplanması sırasında yapılır. Temel fonksiyonlar arasında uygulamalarda en çok kullanılanlardan bir tanesi Rao-Wilton-Glisson (RWG) temel fonksiyonlarıdır [2]. Ancak bu temel fonksiyonlarla tanımlanan akım yoğunluklarının oluşturduğu gecikmiş zaman (*retarded-time*) potansiyellerinin hesaplanması için gerekli olan integrallerin analitik değerleri günümüze kadar bulunamamıştır. Bu yüzden bu potansiyellerin bulunmasında nümerik integrasyon yöntemleri kullanılmıştır.

Bu çalışmada, elektromanyetik saçılma problemini çözmek için kullanılan MOT algoritmasının içerisinde anahtar bir konumda bulunan RWG temel fonksiyonlarının üzerinden akan akımların oluşturduğu vektör ve skaler potansiyellerin zaman uzayındaki tam ve analitik ifadeleri sunulmaktadır. Şu ana kadar bu potansiyeller frekans uzayında ve nümerik yöntemlerle yaklaşık olarak hesaplanmaktaydılar. MOT matris elemanlarının analitik yollarla tam olarak hesaplanmasının MOT algoritmalarındaki hesaplama yükünü azaltmasının yanında önemli bir sorun olarak karşılaşılan kararsızlığa çözüm olabileceği düşünülmektedir [3].

Daha önce yapılan benzer bir çalışmada [4] RWG temel fonksiyonlarıyla belirtilen akım yoğunluklarının zamansal değişimlerinin kısmi olarak polinomlarla ifade edildiği varsayılmıştı. İyi bilinmektedir ki akımlar genellikle dar bantlı bir yapıdadır ve kısmi-polinom yaklaşıklığı bu dar bantlı yapıyı iyi bir şekilde temsil edemez. Mevcut çalışmada, RWG temel fonksiyonları üzerinden akan akımların zamana bağlı davranışları ile ilgili herhangi bir varsayım yapılmaksızın zaman uzayında doğrudan formülize edilmektedir. Bahsedilen potansiyellerin yay parçalarıyla alakalı olduğu ve bu yay parçalarının RWG temel fonksiyonlarının üçgensel tabanlarıyla, gözlem noktasında merkezli $R = ct$ (c ışık hızı) yarıçapına sahip kürenin kesişimi sonucunda olduğu gösterilmektedir. Ayrıntılı olarak, skaler potansiyelin yay parçalarının açılarının toplamı ile doğru orantılı olduğu ve vektör potansiyelin bu yay parçalarının açıortaylarının bir fonksiyonu olduğu gösterilmektedir. Aynı zamanda, yay parçalarının açılarının toplamını ve yay parçalarının açıortaylarını elde etmek için basit bir algoritma sunulacaktır.

Elde edilen zaman-uzay formülasyonunun doğruluğu, frekans uzayında nümerik yöntemlerle elde edilen sonuçların zaman-uzayına çevrilmesi ile yapılan karşılaştırmalar sayesinde gösterilmektedir.

2. RWG Akım Yoğunlukları İçin Gecikmeli Potansiyeller

Bilinen bir $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ akım yoğunluğunun oluşturduğu vektör ve skaler potansiyeller şu şekilde ifade edilebilir:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) * \frac{\delta(t-R/c)}{R} dS' \quad \phi(\mathbf{r}, t) = -\partial_t^{-1} \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}', t) * \frac{\delta(t-R/c)}{R} dS'. \quad (1)$$

Burada ∂_t^{-1} zamana göre integrasyonu, * zamana göre konvolüsyonu ve $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ gözlem ve akım noktaları arasındaki mesafeyi göstermektedir. RWG temel fonksiyonu [2] ile uzamsal dağılımı ve herhangi bir $I(t)$ fonksiyonu ile zamansal değişimi belirtilen akım yoğunluğu kullanılırsa denklem (1)'deki potansiyeller

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\ell_n}{2A_n} I(t) * \underbrace{\int_{S_n} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_n) \frac{\delta(t-R/c)}{R} dS'}_{\mathbf{H}_v(t)} \quad \phi(\mathbf{r}, t) = -\partial_t^{-1} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\ell_n}{A_n} I(t) * \underbrace{\int_{S_n} \frac{\delta(t-R/c)}{R} dS'}_{H_s(t)} \quad (2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada A_n , \mathbf{r}_n ve ℓ_n sırasıyla bir RWG temel fonksiyonunu oluşturan üçgenlerden birinin (S_n) alanını, akım yönünü belirten köşesini ve bu köşenin karşısındaki kenarın uzunluğunu belirtir. Bu çalışmada, sırasıyla $H_s(t)$ ve $\mathbf{H}_v(t)$ fonksiyonları için analitik ifadeler bulunacaktır. Bu fonksiyonlara gecikmiş potansiyellerin dürtü cevabı da denilebilir.

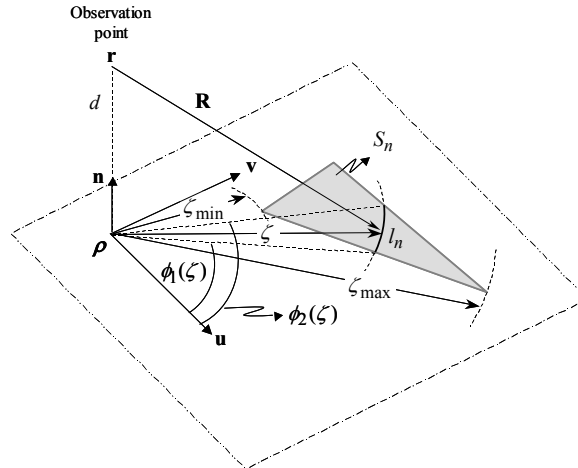
3. Skaler Potansiyel İçin Analitik İfade

$H_s(t)$ ve $\mathbf{H}_v(t)$ fonksiyonları için analitik ifadeler bulunmasında kullanılan en temel özellik Dirac delta fonksiyonunun sağladığı $\int f(r')\delta(t-r'/c)dr' = c \int f(r')\delta(ct-r')dr' = c f(ct) \int \delta(ct-r')dr'$ bağıntıdır. Bu bağıntılar $f(r') = 1/r'$ eşitliğiyle kullanılarak $H_s(t) = t^{-1} \int_{S_n} \delta(ct-R) dS'$ elde edilir. Bu integral yakından incelenirse sonucunun iki yüzeyin kesişiminden oluşan bir yay parçasıyla ilgili olduğu anlaşılır. Bu iki yüzey S_n yüzeyi ve yarıçapı $R = ct$ olan bir kürenin yüzeyidir. $H_s(t)$ integralini alabilmek için orijini gözlem noktası \mathbf{r} 'nin S_n düzlemi üzerine iz düşüm noktası (ρ) olan lokal bir silindirik koordinat sistemi tanımlanır. Şekil 1'de gösterilen bu sistemi (ζ, ϕ, n) üçlüsüyle gösterirsek $H_s(t)$ için şu çıkarım yapılabilir

$$H_s(t) = \frac{1}{t} \int_{\zeta_{\min}}^{\zeta_{\max}} \int_{\phi_1(\zeta)}^{\phi_2(\zeta)} \delta(ct-R) \zeta d\phi d\zeta = \frac{1}{t} \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \alpha_1(\sqrt{R^2-d^2}) \delta(ct-R) R dR \quad (3)$$

$$= \begin{cases} c \alpha_1(t) & ; R_{\min} < ct < R_{\max} \\ 0 & ; \text{diğer.} \end{cases}$$

Denklem (10)'daki çıkarımlar yapılırken $R = (\zeta^2 + d^2)^{-1/2}$ eşitliğiyle değişken değişimi yapılmış ve $\alpha_1 = \phi_2 - \phi_1$ tanımı kullanılmıştır. Denklem (10), $H_s(t)$ integralinin sonucunun $R = ct$ küresiyle S_n yüzeyinin kesişiminden oluşan yay parçasının raydan cinsinden uzunluğuyla ışık hızının çarpımı olduğunu göstermektedir.



Şekil 1. İntegrallerin alınmasında kullanılan değerlerin tanımı.

4. Vektör Potansiyel İçin Analitik İfade

Vektör potansiyel ifadesini bulmak için öncelikle bu ifade iki kısma ayrılır

$$\mathbf{H}_v(t) = (\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_n) \int_{S_n} \frac{\delta(t-R/c)}{R} dS' + \int_{S_n} (\mathbf{r}' - \boldsymbol{\rho}) \frac{\delta(t-R/c)}{R} dS'. \quad (4)$$

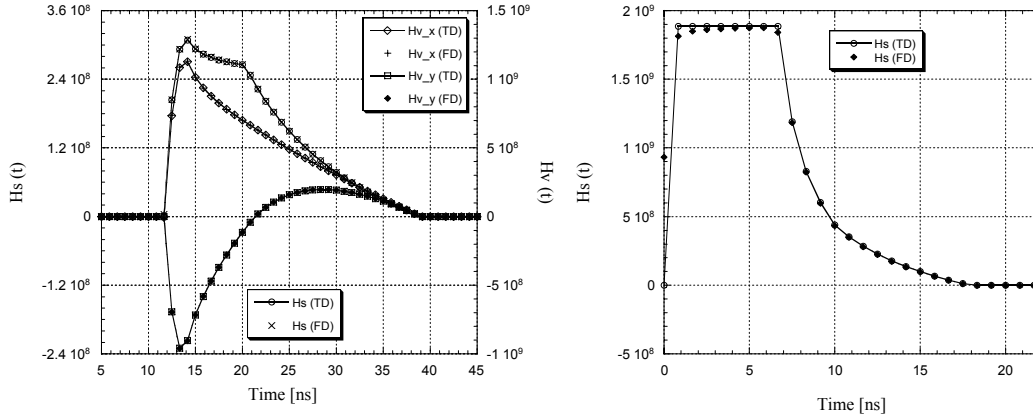
$H_s(t)$ 'nin analitik ifadesini bulmak için izlenen adımlar $\mathbf{H}_2(t)$ için de tekrarlanarak şu sonuca ulaşılabılır:

$$\mathbf{H}_2(t) = c\sqrt{(ct)^2 - d^2} \sin\left(\frac{1}{2}\alpha_1(t)\right)\hat{\mathbf{e}}_1(t) \quad ; \quad R_{\min} < ct < R_{\max}. \quad (5)$$

Erişilen son ifade $\hat{\mathbf{e}}_1(t)$, $\alpha_1(t)$ uzunluğundaki yay parçasının merkezini gösteren birim açıortay vektördür.

5. Nümerik Sonuçlar

Yukarıda $H_s(t)$ ve $\mathbf{H}_v(t)$ için bulunan sonuçların doğruluğunu göstermek için köşeleri $\mathbf{r}_1 = (10, 0, 1)$, $\mathbf{r}_2 = (15, -5, 1)$ ve $\mathbf{r}_3 = (15, 5, 1)$ olan bir üçgen ile değişik gözlem noktaları için $H_s(t)$ ve $\mathbf{H}_v(t)$ hesaplanmıştır. Karşılaştırma yapmak için aynı integraller [5]'te verilen yarı nümerik tekniklerle frekans uzayında hesaplanmış ve sonuçlar FFT kullanılarak zaman uzayına aktarılmıştır. İki değişik gözlem noktası için sonuçlar Şekil 2 (a) ve (b)'de verilmiştir. Analitik olarak zaman uzayında bulunan sonuçlar (TD) olarak, referans [5] yardımıyla bulunan sonuçlar (FD) olarak etiketlenmişlerdir. Şekil 2(a)'da gözlem noktası $\mathbf{r} = (11, -6, 1)$ için sonuçlar verilmiştir. Görüldüğü üzere sonuçlar birbirinden ayırt edilemeyecek kadar yakındır. Şekil 2(b)'de S_n üzerinde bulunan $\mathbf{r} = (13, 0, 1)$ gözlem noktası için $H_s(t)$ sonucu verilmiştir ($\mathbf{H}_v(t)$ sonucu benzerdir). Görüldüğü üzere gözlem noktası kaynak bölgesinin üzerinde olduğu halde skaler potansiyelde klasik anlamda bir teklik yoktur. Bu beklenen bir sonuçtur.



Şekil 2. İntegrallerin alınmasında kullanılan değerlerin tanımı.

Kaynaklar

- [1] A. G. Tijhuis, "Electromagnetic Inverse Profiling," UNV Science Press BV, 1997.
- [2] S. M. Rao, D. R. Wilton ve A. W. Glisson, "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape," IEEE Trans. Antennas Propagat., cilt. 30, sayf. 408-418, 1982.
- [3] B. Shanker, A. A. Ergin, K. Aygün ve E. Michielssen, "Analysis of transient electromagnetic scattering from closed surfaces using a combined field integral equation," IEEE Trans. Antennas Propagat., cilt. 48, sayı. 7, sayf. 1064-1074, Temmuz 2000.
- [4] M. Lu ve E. Michielssen, "Closed form evaluation of time domain fields due to Rao-Wilton-Glisson sources for use in marching-on-in-time based EFIE solvers," Antennas and Propagation Society International Symposium, San Antonio, TX, 2002.
- [5] D. R. Wilton, S. M. Rao, A. W. Glisson, D. H. Schaubert, O. M. Al-Bundak, ve C. M. Butler, "Potential integrals for uniform and linear source distributions on polygonal and polyhedral domains," IEEE Trans. Antennas Propagat., cilt. 32, sayfa. 276-281, 1984.