

Kübik Elemanlarla Modellenen Homojen Olmayan Dielektrik Küreden Elektromanyetik Saçılma

Ömer ZOR, Burak POLAT
Uludağ Üniversitesi
Elektronik Mühendisliği Bölümü
Görükle, Bursa
omerzor@uludag.edu.tr , burakpolat@uludag.edu.tr

Özet: Bir homojen düzlemsel dalga tarafından aydınlatılan iki tabakalı bir homojen, kayıplı dielektrik küre içindeki elektrik alan dağılımı dyadik Green fonksiyonu tekniği kullanılarak formüle edilmiş ve Moment Yöntemine dayalı genel çözüm tekniği verilmiştir. Green fonksiyonlarında ortaya çıkan tekillik, 2005 yılında Gao ve arkadaşları [1] tarafından ortaya konan ve Moment matrisinin hacim integrali şeklindeki elemanlarını yüzey integrallerine dönüştüren bir yöntem ile ortadan kaldırılmıştır. Bu tekniğin hem fiziksel hem de sayısal olarak elverişliliğini test etmek üzere, tek ve çift tabakalı dielektrik kürelerden saçılma problemi ele alınmış ve sayısal çözümler ışığında bir kübik modelin ne kadar sağlıklı olduğu, problemin fiziksel ve geometrik parametrelerine bağlı olarak test edilmiştir. Elde edilen sonuçlar sayısal modelin başarılı ve kübik eleman sayısına göre hızlı bir yakınsamaya sahip olduğunu ortaya koymaktadır ve bu modelin genel aksenal simetrik yapıdaki cisimlere güvenle uygulanabileceği yönünde umut vermektedir.

1. Giriş

Üç boyutlu dielektrik cisimlerden saçılma mekanizması incelenirken genel olarak dyadik Green fonksiyonları ile karşılaşırlar [1]. Green fonksiyonu tekniği, toplam alan ifadesini dielektrik cisim üzerinde tanımlı olan hacim integral denklemi ile ifade eder. Bu yöntemde karşılaşılan temel zorluk, gözlem noktasının saçıcı cisim üzerine düştüğü zaman hacim integrallerinde ortaya çıkan tekilliklerdir. Bu tekillikleri sayısal hesaplamalarda ortadan kaldırmak amacıyla literatürde birçok farklı yöntem mevcuttur. Örneğin Bladel [2], tekil noktayı içeren çok küçük bir bölgeyi integrasyon hacminden ayırarak Cauchy integrasyonu ile analitik sonuca ulaşmaktadır. Yaghjian [3,4], elektrik alanı kaynak bölgesinin içinde ve dışında genelleştirilmiş elektrik dyadik Green fonksiyonları ile ifade etmektedir. Genelleştirilmiş elektrik dyadik Green fonksiyonu, tekilliğin bulunduğu bölgenin dışında tanımlı olan geleneksel dyadik ve tekilliğin bulunduğu bölgede tanımlı olan kaynak dyadik olmak üzere iki kısımdan oluşur. Gel'fand ve Shilov [5], Green fonksiyonunun türevlerini genelleştirilmiş fonksiyonlar olarak tanımlamaktadır. Lee ve ark. [6], bu genelleştirilmiş fonksiyon ifadelerini kullanarak Green fonksiyonunun ikinci dereceden türevini kaynak bölgesinde bir distribüsyon şeklinde tanımlamaktadır. Gao ve ark. [7] ise, hacim integrallerini yüzey integrallerine dönüştüren bir genel analitik teknik sunmaktadır.

Bu çalışmada, bir homojen düzlemsel dalga tarafından aydınlatılan iki tabakalı, kayıplı dielektrik küreden saçılma mekanizması, cisim, Moment yöntemi uyarınca kübik elemanlara bölünerek ve her kübik eleman için Gao ve ark. [7] tarafından dyadik Green fonksiyonunun tekilliğinin kaldırılması için verilen yöntem uygulanarak incelenmektedir (bkz. Şekil 1a,b). Buna göre, Moment matrisi elemanları, her bir küp yüzeyinde tanımlı yüzey integrallerinden meydana gelmektedir. Geometrinin açısız simetriye sahip olmasından ötürü çözümün sadece çeyrek cisim üzerinde gerçekleştirilmesi yeterli olmaktadır.

Harmonik dalgalar için zaman faktörü $e^{i\omega t}$ olarak seçilmiştir.

2. Problemin Formülasyonu

Hacim eşdeğer teoremi yardımıyla, Şekil 1a.'daki çift tabakalı homojen, kayıplı dielektrik küreden saçılma sonucu uzayda herhangi bir noktada gözlenen toplam elektriksel alan

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}^i(\vec{r}) + \int_{\mathcal{G}} \tau(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') \cdot \overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}') d\mathcal{G}' \quad (1)$$

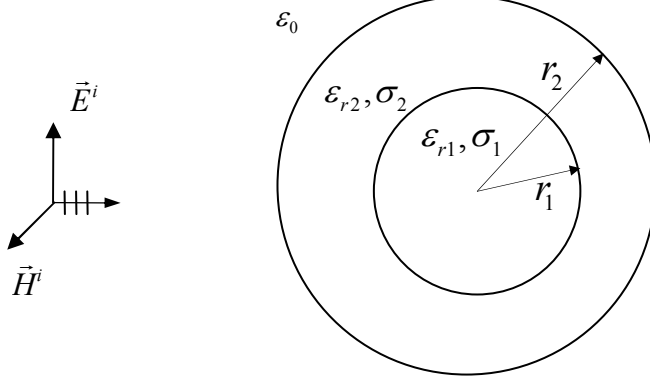
ile verilen integral denklemi sağlar. Burada $\tau(\vec{r}) = i\omega(\epsilon_c(\vec{r}) - \epsilon_0)$, $\epsilon_c(\vec{r})$ kompleks dielektrik sabiti,

$\vec{E}^i(\vec{r})$ gelen elektrik alan, $\overline{\overline{G}}(\vec{r}, \vec{r}')$ serbest uzay dyadik Green fonksiyonudur.

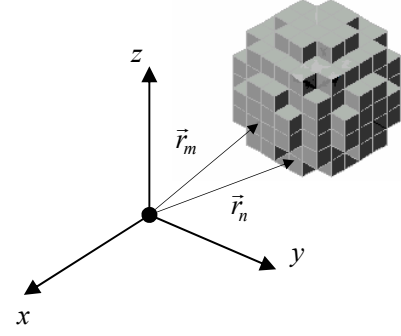
Darbe türü baz fonksiyonları ve nokta uydurma tekniği tercih edilerek standart Moment Yönteminin uygulanması ile (1) integral denklemi aşağıdaki doğrusal denklem sistemine dönüşür.

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{n=1}^N S_{x_i x_j}^{mn} E_{x_j}(\vec{r}_n) = -E_{x_i}^i(\vec{r}_m) \quad m = 1, 2, \dots, N ; \quad i = 0, 1, 2 \quad (2)$$

Burada, (x_0, x_1, x_2) sıralı gösterimi (x, y, z) eksenlerini ve $\vec{r}_m = (x_{0m}, x_{1m}, x_{2m})$, $\vec{r}_n = (x_{0n}, x_{1n}, x_{2n})$ noktaları ise sırasıyla gözlem ve kaynak noktalarını belirtmek üzere,



Şekil 1a Çift tabakalı homojen, kayıplı dielektrik küreden saçılma problemi



Şekil 1b Çift tabakalı homojen, kayıplı dielektrik kürenin kübik modeli

$$S_{x_i x_j}^{mn} = \frac{\tau(r_n)}{i\omega\epsilon_0} \left(-v_{x_i x_j}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) \right), \quad m \neq n \text{ ve } i \neq j \quad (3a)$$

$$S_{x_i x_i}^{mn} = \frac{\tau(r_n)}{i\omega\epsilon_0} \left(v_{x_{(i\oplus 1)} x_{(i\oplus 1)}}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) + v_{x_{(i\oplus 2)} x_{(i\oplus 2)}}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) \right), \quad m \neq n \text{ ve } i = j \quad (3b)$$

$$S_{x_i x_i}^{mm} = \frac{\tau(r_n)}{i\omega\epsilon_0} \left(-1 + v_{x_{(i\oplus 1)} x_{(i\oplus 1)}}^s(\vec{r}_n) + v_{x_{(i\oplus 2)} x_{(i\oplus 2)}}^s(\vec{r}_n) \right) - 1, \quad m = n \text{ ve } i = j \quad (3c)$$

$$S_{x_i x_j}^{mm} = 0, \quad m = n \text{ ve } i \neq j \quad (3d)$$

$$\vec{E}^i(\vec{r}_m) = E_{x_0}^i(\vec{r}_m) \hat{x}, \quad E_{x_0}^i(\vec{r}_m) = E_{0x_0} e^{-ik_0 x_{2m}} \quad (4)$$

$$v_{x_i x_i}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) = \frac{1}{4\pi} \left[\int_{x_{(i\oplus 1)n}-a}^{x_{(i\oplus 1)n}+a} \int_{x_{(i\oplus 2)n}-a}^{x_{(i\oplus 2)n}+a} \left(\frac{(x_{im} - x_{in} + a) e^{-ik_0 R_{x_i 2}} (ik_0 R_{x_i 2} + 1)}{R_{x_i 2}^3} - \frac{(x_{im} - x_{in} - a) e^{-ik_0 R_{x_i 1}} (ik_0 R_{x_i 1} + 1)}{R_{x_i 1}^3} \right) dx'_{(i\oplus 2)} dx'_{(i\oplus 1)} \right], \quad i = 0, 1 \quad (5a)$$

$$v_{x_i x_{(i\oplus 1,2)}}(\vec{r}_m, \vec{r}_n) = \frac{1}{4\pi} \left[\int_{x_{in}-a}^{x_{in}+a} \int_{x_{(i\oplus 2,1)n}-a}^{x_{(i\oplus 2,1)n}+a} (x_{im} - x'_i) \left(\frac{e^{-ik_0 R_{x_{(i\oplus 1,2)} 2}} (ik_0 R_{x_{(i\oplus 1,2)} 2} + 1)}{R_{x_{(i\oplus 1,2)} 2}^3} - \frac{e^{-ik_0 R_{x_{(i\oplus 1,2)} 1}} (ik_0 R_{x_{(i\oplus 1,2)} 1} + 1)}{R_{x_{(i\oplus 1,2)} 1}^3} \right) dx'_{(i\oplus 2,1)} dx'_i \right], \quad i = 0, 1, 2 \quad (5b)$$

$$R_{x_i 1} = \left[(x_{im} - x_{in} - a)^2 + (x_{(i\oplus 1)m} - x'_{(i\oplus 1)})^2 + (x_{(i\oplus 2)m} - x'_{(i\oplus 2)})^2 \right]^{1/2} \quad (5c)$$

$$R_{x,2} = \left[(x_{im} - x_{in} + a)^2 + (x_{(i\oplus 1)m} - x'_{(i\oplus 1)})^2 + (x_{(i\oplus 2)m} - x'_{(i\oplus 2)})^2 \right]^{1/2} \quad (5d)$$

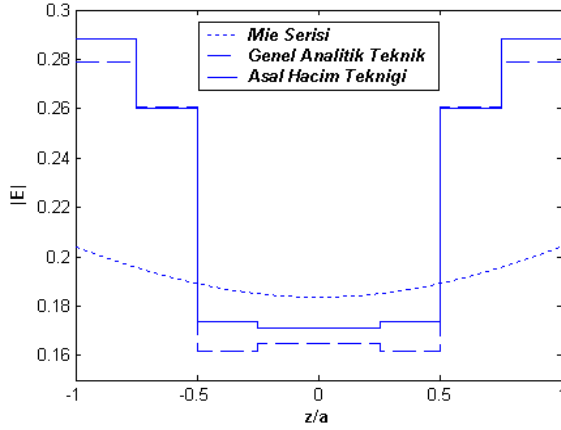
ile verilir. \oplus sembolü 3 tabanında modüler toplama işlemini belirtmektedir ve $2a$ kübik elemanların kenar uzunluğunu belirtir.

3. Sayısal Uygulamalar

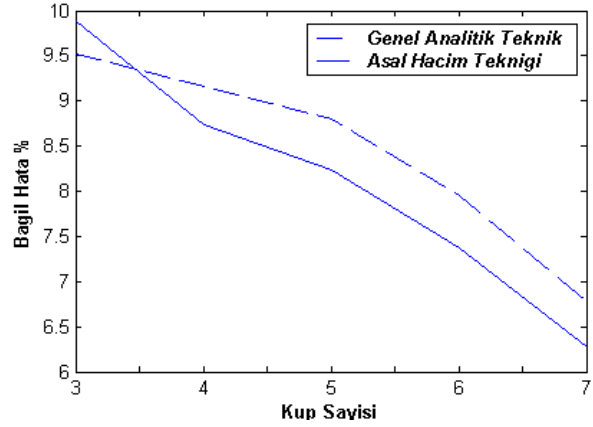
Tabakalı kürenin, $\varepsilon_{r1} = 16$, $\varepsilon_{r2} = 9$ dielektrik sabitlerine ve k_0 , boş uzay dalga sayısı olmak üzere $k_0 r_1 = 0.0628$, $k_0 r_2 = 0.1257$ elektriksel yarıçaplarına sahip olduğu durumda, içerisinde oluşan elektrik alan ifadesi Genel Analitik Teknik ile hesaplanmakta [7] ve çözümün yakınsaklığı Mie Serisi çözümü ve Asal Hacim Tekniği çözümü [6] ile karşılaştırılmaktadır.

Şekil 2'de yarıçap boyunca dört küp örnek alınarak çeyrek cismi modellemek için 70 tane küp kullanılmıştır. Bu durumda 210 tane bilinmeyen toplam elektrik alan bileşeni ortaya çıkmaktadır.

Şekil 3'te Genel Analitik ve Asal Hacim tekniklerinde, sayısal yöntemden kaynaklanan yüzde bağıl hataların küp sayısının artması durumundaki değişimleri görülmektedir. Her iki yöntemin bağıl hatalarının küp sayısının artması ile hızlı bir şekilde azaldığı görülmektedir.



Şekil 2 $\varepsilon_{r1} = 16$, $k_0 r_1 = 0.0628$, $\varepsilon_{r2} = 9$, $k_0 r_2 = 0.1257$ olan kayıpsız tabakalı dielektrik küre içerisindeki elektrik alanın z ekseninde değişimi



Şekil 3 $\varepsilon_r = 5$, $k_0 r = 0.1257$ olan kayıpsız dielektrik küre içindeki alan için yüzey integrasyonu ve hacim integrasyonu formülasyonu kullanılması durumunda ortaya çıkan bağıl hata

4. Sonuç

Homojen küre ve tabakalı küre için Genel Analitik Teknik ile elde edilen hesaplamalar analitik referans çözümler ile karşılaştırılmıştır. Hesaplamaların hızlı yakınsama gösterdiği belirlenmiştir. Küp sayısının artması hesaplama süresini arttırmaktadır ancak Şekil 3'te görüldüğü gibi, bağıl hatayı düşürmektedir.

Elde edilen sonuçlar bu modelin genel eksenel simetrik yapıdaki cisimlere güvenle uygulanabileceği yönünde umut vermektedir.

Kaynaklar

- [1]. Chen-To T., Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory. IEEE Press, 1971.
- [2]. Bladel J. V., "Some remarks on Green's dyadic for infinite space", IRE Trans. Antennas Propagat., AP-9, s. 563-566, 1961.
- [3]. Yaghjian A. D., "Electric dyadic Green's functions in the source region", Proc. IEEE 68, No.2, s. 248-263, 1980.
- [4]. Yaghjian A. D., "A Delta-distribution derivation of electric field in the source region", Electromagn. 2, s. 161-167, 1982.
- [5]. Gel'fand I. M. ve Shilov G. E., Generalized Functions. Academic Press New York, s. 295-305, 1964.
- [6]. Lee S. W., Boersma J., Law C. L. ve Deschamps G. A., "Singularity in Green's function and its numerical evaluation", IEEE. Trans. Antennas Propagat. AP-28, No.3, s. 311-317, 1980.
- [7]. Gao G., Torres-Verdin C. ve Habashy T. M., "Analytical techniques to evaluate the integrals of 3D and 2D spatial dyadic Green's functions", PIER 52, s. 47-80, 2005.