

İnce Tel Yapılar için Zamanda Adımlama Yönteminin Newmark-Beta Formülasyonu ile Kararlılaştırılması

Sena Esen BAYER*
*Kocaeli Üniversitesi
Mekatronik Mühendisliği Bölümü
Veziroğlu Yerleşkesi, İzmit, Kocaeli.
senabayer@kou.edu.tr

A. Arif ERGİN **
**Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü
Elektronik Mühendisliği Bölümü
İstanbul Cad. No 101, Gebze, Kocaeli.
argin@gyte.edu.tr

Özet: Bu çalışma ile geniş bantlı elektromanyetik darbelerin ince tellerden oluşmuş cisimlerden saçılmasını incelemek için geliştirilmiş olan zamanda adımlama (marching-on-in-time, MOT) yönteminin kararlılığının artırılması hedeflenmektedir. Söz konusu olan kararsızlık problemi 1991 yılında zamanda adımlama yönteminin bulunmasından beri incelenegelmiş ve gelişmeler kaydedilmesiyle birlikte tam bir çözümü bulunmamıştır [1]. Bu çalışmada tel yapılardan saçılan elektrik alan ifadesinin hesaplanması amacıyla kullanılabilir iki yöntemden (Newmark-Beta formülasyonu ve analitik integrasyon) bahsedilmiş ve bu yöntemlerin kararlılığa olan etkisi incelenmiştir. Zaman domeni moment metodu (method of moments – MOM) [2] ile karşılaştırılan sonuçların kararlı ve doğru olduğu gözlenmiştir. Belirlenen bir β parametresi ile kararlılığın nasıl değiştiği gösterilmiştir.

1. Giriş

Bu çalışma ile geniş bantlı elektromanyetik darbelerin cisimlerden saçılmasını incelemek için geliştirilmiş olan zamanda adımlama yönteminin kararlılığının artırılması hedeflenmektedir. Zamanda adımlama yönteminin kararlılığının artırılması için geçmişte değişik çözüm yöntemleri önerilmiştir [1],[3]. Ancak bu çözüm yöntemleri ya sadece yüzeyden saçılma analizleri için geçerlidir (ör.[1]) ya da kararlılığı yapay sinyal işleme teknikleriyle sağlarlar [3]. Sonuç olarak tellerden saçılma problemini çözen MOT yöntemleri için yapılmış özel bir kararlılık analizi ve çözüm önerisi literatürde bulunmamaktadır.

Bu çalışma kapsamında tellerden saçılma analizinde kararlılığın artırılabilmesi için iki temel çözüm önerilmektedir. Bunlardan birincisi genellikle zaman domeni sonlu elemanlar (FEM) çözücülerinde kullanılmış olan Newmark-Beta formülasyonudur [4]. Bu yöntemde, denklemlerdeki türevler sonlu farklarla yaklaşık olarak hesaplanırken kararlılığı artırmak için bağımsız bir beta (β) parametresi kullanılır. İkinci olarak da MOT yönteminde şimdiye kadar nümerik olarak alınmış integrallerin bir kısmının analitik olarak alınmasının kararlılığa katkısı incelenecektir. MOT yöntemindeki kararsızlığın sebeplerinden birisi olarak nümerik hatalar gösterilmiştir [5]. Bunu temel kabul ettiğimizde analitik olarak bulunan integral sonuçlarının kararlılığa katkısı olması gerektiği temel hipotezdir.

2. Klasik Yöntemle Tel Yapılar için Elektrik Alan İntegral Denklemi (EAİD) Çözümü

Elektrik alan integral denklemi (EAİD), elektrik alanın teğetsel bileşeninin mükemmel iletken bir saçıcı cisim yüzeyinde sıfır olduğu sınır koşulu üzerine kurulmuştur:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_t^i}{\partial t} = \left[\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi \right]_t \quad (1)$$

Bu denklemde \mathbf{E}^i gelen elektrik alanı, \mathbf{A} ve ϕ sırasıyla vektör ve skaler potansiyelleri belirtmektedir. Alt indis olarak kullanılan “t” tel yüzeyine teğetsel bileşenleri göstermektedir.

Bu çalışmanın amacı ince teller ile modellenmiş cisimlerden saçılmayı analiz etmektir. İnce teller ile çalışılırken üç boyutlu uzayda koordinatların parametrik olarak gösterilmesi işlem kolaylığı sağlayacağından tel eksenini boyunca uzanan birim vektörü $\hat{\ell}(\ell)$ olarak tanımlanmıştır ve ince tel yaklaşıklıkları kullanılmıştır. Mevcut haliyle elektrik alan integral denklemi fonksiyonel bir eşitliktir. Nümerik çözümün yapılabilmesi için daha somut olan sayısal eşitliklerin kurulması lazımdır. Denklem (1), bu eşitlikleri kurmak ve daha sonra da bilinmeyen akım yoğunluğunu ifade etmek için gerekli olan temel fonksiyonlar ile test edilirse;

$$\underbrace{\langle \mathbf{f}_m(\ell), \partial_t \mathbf{E}^i(\ell, t) \rangle}_{E_{mj}} \Big|_{t=t_j} = \underbrace{\partial_t^2 \langle \mathbf{f}_m(\ell), \mathbf{A}(\ell, t) \rangle}_{\psi_{mj}} \Big|_{t=t_j} + \underbrace{\langle \mathbf{f}_m(\ell), \nabla \partial_t \phi(\ell, t) \rangle}_{\varphi_{mj}} \Big|_{t=t_j} ; \quad m \in \{1, \dots, N\} \quad (2)$$

denklemleri elde edilir. Nümerik çözümün yapılabilmesi için daha somut olan sayısal eşitliklerin kurulması lazımdır. Denklem (2)'de yer alan \mathbf{f}_m fonksiyonu bu eşitlikleri kurmak ve daha sonra da bilinmeyen akım yoğunluğunu ifade etmek amacıyla tanımlanan lineer temel fonksiyonlardır. Toplam N adet temel fonksiyon olduğu için denklem (2) ile değişik $m \in \{1, \dots, N\}$ değerleri kullanılarak N adet sayısal eşitlik gösteren denklem kurulabilir. Denklem (2)'de yer alan ikinci dereceden türev ifadesi sonlu farklar yöntemiyle yaklaşık olarak

$$E_{m,j} \cong \frac{\psi_{m,j+1} - 2\psi_{m,j} + \psi_{m,j-1}}{\Delta t^2} + \varphi_{m,j} \quad (3)$$

şeklinde elde edilir. Denklem (3)'te yer alan (j+1)inci zaman adımındaki akım değerinin çekilmesiyle, zamanda adım adım ilerlenerek akım değerleri hesaplanmıştır.

3. Newmark-Beta Formülasyonu (B-MOT) ile Tel Yapılar için EAİD Çözümü

Bir önceki bölümde anlatılan klasik zamanda adımlama yöntemiyle yapılan çözümlerin kararsız olduğu Bölüm 5'te gösterilecektir. Bu gibi kararsızlıklar zamanda adımlama yönteminin yaygın kullanılmasına engel olmuştur. Yüzeylerden saçılma problemleri için kararsızlıkların sebepleri ve bunların üstesinden gelinmesi için pek çok araştırma yapılmış olmakla birlikte tel yapılardan saçılma problemlerinde bu araştırmaların sayısı yok denecek kadar azdır. Benzer kararsızlıkların zaman domeni sonlu elemanlar yönteminde de gözlemlendiği ve çözümü için Newmark-Beta formülasyonunun önerildiği bilinmektedir[4]. Bu bölümde zamanda adımlama yönteminde de Newmark-Beta formülasyonunun kullanılmasının kararlılığı sağlayıp sağlamadığı incelenecektir.

Denklem (2)'de yer alan EAİD, Newmark-Beta Formülasyonu ile yaklaşık olarak

$$E_{m,j} \cong \frac{\psi_{m,j+1} - 2\psi_{m,j} + \psi_{m,j-1}}{\Delta t^2} + \beta \varphi_{m,j+1} + (1 - 2\beta) \varphi_{m,j} + \beta \varphi_{m,j-1} \quad (4)$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifadede $\beta = 0$ alınırsa Denklem (3)'teki tanımlamaya ulaşıldığı görülür. Yani klasik formülasyon, Newmark-Beta formülasyonunun özel bir durumudur. Denklem (4) kullanılarak (j+1) inci zaman adımındaki akım değeri zamanda adımlama kullanılarak klasik formülasyonda olduğu gibi gerçekleştirilir.

4. Potansiyel İntegrallerin Analitik Olarak Alındığı EAİD Çözümü (A-MOT)

Klasik ve B-MOT formülasyonunda EAİD'nin bulunabilmesi için alınması gereken $\psi_{m,p}$ ve $\varphi_{m,p}$ integralleri nümerik olarak hesaplanmıştır. Bu integrallerin analitik olarak hesaplanmasının kararlılığa ve tutarlılığa olan etkisi de yapılan bu çalışma kapsamında incelenmiştir. İlgili integrallerin analitik sonuçları daha önceden frekans domeninde ifade edilip kullanılmıştır. Ancak bu çalışmada yeni bir formülasyon ile analitik sonuçlar (akımların zamansal değişimleri de hesaba katılarak) doğrudan zaman domeninde bulunmuştur. Elde edilen analitik ifadeler uzun olduğu için sunum sırasında detaylı olarak açıklanacaktır. B-MOT ve analitik formülasyonlarla bulunan akımların, zaman domeni moment metodu (method of moments – MOM) [2] ile bulunanlar ile karşılaştırılması gelecek bölümünde verilmiştir. Sonuçların kararlı ve tutarlı olduğu gözlemlenmektedir.

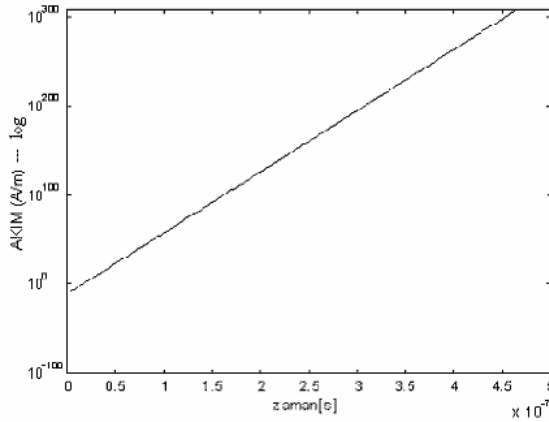
5. Nümerik Sonuçlar:

Gelen elektrik alan ifadesi olarak

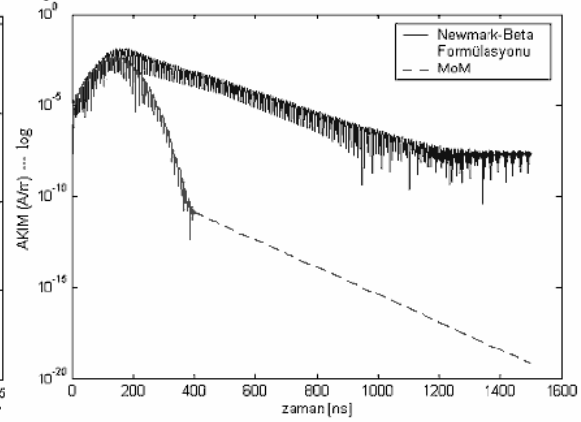
$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{p}} \cos(2\pi f_0 \tau) \exp \left[-\frac{(\tau - t_d)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (5)$$

module edilmiş Gauss darbesi kullanılmıştır. Denklem (5)'te $f_0 = 50$ MHz merkez frekans, $\tau = t - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}}/c$, $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{x}}$ gelen dalganın yayılım yönü ve $\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{z}}$ polarizasyonu, $\sigma = 6/(2\pi f_{bw})$, $f_{bw} = 23.87$ MHz sinyalin yaklaşık bant genişliği, $t_d = 3.5\sigma$ olarak ifade edilebilir. Mükemmel iletken cisim olarak düz tel şeklinde, yarıçapı $a = 1$ mm olan, z eksenini boyunca $-1 \leq z \leq 1$ m aralığında uzanan, her birinin uzunluğu 0.25 m olan 8 adet tel parçasının birleşiminden oluşan tel yapı kullanılmıştır.

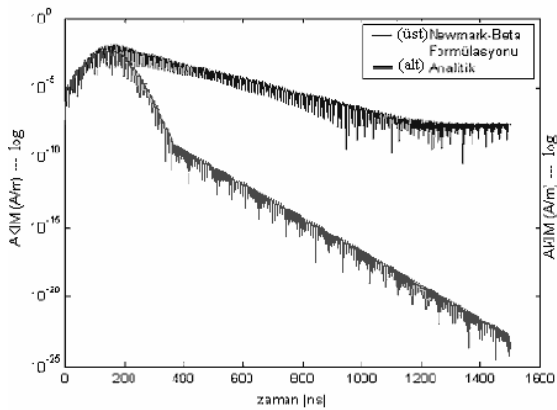
Tel parçası, Denklem (5) ile tanımlanan elektrik alan ile aydınlatıldığında, orta noktasında Şekil 1’de görülen (logaritmik skala) akım dağılımı oluşur. Görüldüğü gibi ilk zaman adımlarından itibaren kararsızlık gözlenmektedir. Bu kararsızlığın giderilmesi amacıyla B-MOT formülasyonu kullanılmıştır. Şekil 2’de görüldüğü gibi klasik yöntemde 450 ns’den sonraki zaman adımlarında gözlenen kararsızlık Newmark-Beta formülasyonu ile giderilmiştir ve β değerinin 0.25’e kadar küçülmesiyle kararlılığın arttığı gözlenmiştir ancak [2]’deki zaman domeni moment metodu ile üretilen sonuçlarla tutarlı olmadığı sonucuna varılmıştır. Tutarlılığın giderilmesi amacıyla A-MOT formülasyonu eklenmiştir. Şekil 4’te A-MOT ile bulunan sonuçların B-MOT ile bulunan sonuçlara göre daha kararlı olduğu, Şekil 5’te ise A-MOT ile üretilen sonuçların zaman domeni moment metodu ile üretilen sonuçlarla tutarlı ve daha kararlı olduğu görülmektedir.



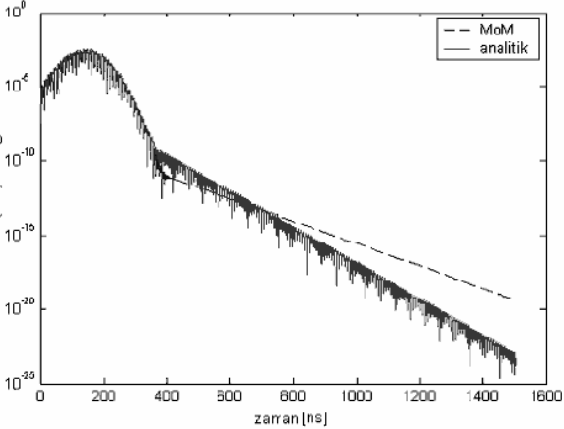
Şekil 1. Düz tel parçasının orta noktasındaki akım dağılımı (log)



Şekil 2. Düz tel şeklindeki tel parçası için MoM çözümü ile B-MOT çözümünün logaritmik olarak karşılaştırılması.



Şekil 3. Düz tel yapılar için Newmark-Beta formülasyonu ile bulunan akım dağılımı ile A-MOT ile bulunan akım dağılımının karşılaştırılması.



Şekil 4. Düz tel şeklindeki tel parçası için MoM çözümü ile A-MOT çözümünün logaritmik olarak karşılaştırılması.

Kaynaklar

- [1] B. Shanker, A. A. Ergin, K. Aygün, E. Michielssen, “Analysis of Transient Electromagnetic Scattering from Closed Surfaces Using a Combined Field Integral Equation” IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 48, no. 7, sayfa. 1064-1074, 2000.
- [2] Ş. Özsoy, “İnce Tellerden Oluşan Yapılardan Saçılma Analizi İçin Zamana Ve Frekansa Bağlı İki Çözücü”, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, 2003.
- [3] D. A. Vechinski ve S. M. Rao, “A stable procedure to calculate the transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape,” IEEE Trans. Antennas Propagat. , vol. 40, sayfa. 661–665, Haziran 1992.
- [4] Y. Wang ve T. Itoh, “Envelope-Finite-Element (EVFE) Technique A More Efficient Time-Domain Scheme,” IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 49, sayfa. 2241-2247, Aralık 2001.
- [5] B. P. Rynne ve P. D. Smith, “Stability of time marching algorithms for the electric field integral equations,” J. Electromagn. Waves Applicat., vol. 12, sayfa. 1181–1205, 1990