

# Elektromanyetik Sınır Değer Problemlerinin Düzgün Olmayan Ağlar ve Altı Yüzlü Sonlu Kenar Elemanları İle Modellenmesi

A. Egemen YILMAZ, Mustafa KUZUOĞLU  
Orta Doğu Teknik Üniversitesi  
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü  
06520, Ankara  
[ayilmaz@havelan.com.tr](mailto:ayilmaz@havelan.com.tr), [kuzuoglu@metu.edu.tr](mailto:kuzuoglu@metu.edu.tr)

**Özet:** Elektromanyetik sınır değer problemleri arasında önemli bir yer tutan açık bölge saçılma problemlerinin, düzgün olmayan ağ ile üretilmiş doğrusal ve/veya ikinci dereceden eş parametrelili altıyüzlü kenar elemanları ile çözümü bu çalışmanın esasını oluşturmaktadır. Maxwell denklemlerinin kısmi diferansiyel formu temel alınmakta; elektrik alan zayıf formda temsil edilmektedir. Çözüm bölgesi dahilinde problem geometrisine uygun bir ağ üretilerek altı yüzlü elemanlar oluşturulmakta; elektrik alan her bir elemanda Galerkin Yöntemi ile tanımlanmış olan baz fonksiyonlar cinsinden ifade edilmektedir. Ağ sonlandırımı işlevini yerine getirmek üzere karmaşık koordinat dönüşümü ile gerçekleştirilmiş olan Mükemmel Eşlenmiş Katmanlar kullanılmaktadır. Geliştirilen yöntem, çeşitli cisimlerin Radar Ara Kesiti hesaplamaları gibi pratik problemlerde uygulanmıştır.

## 1. Giriş

Elektromanyetik sınır değer problemlerinin, genel olarak açık bölge saçılma veya ışınma problemleri olarak gruplandırılması mümkündür. Bu tarz problemler için analitik çözümün mümkün olmadığı durumlarda, nümerik yöntemler kullanılmaktadır. Bu yöntemler arasından aslen yapısal mekanik problemleri için geliştirilmiş olan Sonlu Elemanlar Yöntemi, 1940'lı yıllarda Courant tarafından elektromanyetik problemlere uyarlanmıştır [1]. Sonlu Elemanlar Yöntemi, isminden de anlaşılacağı üzere problemin tanımlandığı bölgenin küçük parçalara bölünmesi ve bilinmeyen fonksiyonun bu küçük parçalar üzerinde çeşitli baz fonksiyonlarla ifade edilmesi temeline dayanır. Yöntem, homojen olmayan karmaşık cisimlerin modellenmesinde başarılı olmasına karşın, elektrik alanın çok büyük değerler alabildiği cisim köşe ve uç bölgelerinde aynı başarılı sonuçları verememektedir. Yöntemin bir diğer özelliği de, problemi ifade eden denklemdeki matrisin seyrek bir matris olmasıdır. Bu sayede, bellek kullanımı ve matris çözümü verimli bir şekilde gerçekleştirilebilmektedir. Bu çalışmada Bentley'in Satır Endeksli Seyrek Matris Depolama Yöntemi [2] ve çözüm için de Çift Eşlenikli Gradyanlar Yöntemi seçilmiştir [3].

Sonlu Elemanlar Yöntemi, doğası gereği açık bölge problemlerinde doğrudan kullanılmak için uygun değildir. Yöntemin açık bölge problemlerine uygulanması için literatürde değişik yöntemler önerilmiştir. Bu yöntemler arasından Berenger'nin önerdiği Mükemmel Eşlenmiş Katmanlar (PML) yöntemi [4], ilgili frekanstaki bir elektromanyetik dalgayı yansıtmayan kuramsal bir cisim vasıtasıyla uzak bölgelerin modellenmesi prensibine dayanır. Bu çalışmada Mükemmel Eşlenmiş Katmanlar, karmaşık koordinat dönüşümü [5] ile modellenmiştir.

## 2. Elektrik Alan Formülasyonu

Üç boyutlu bir elektromanyetik saçılım problemi, en genel haliyle herhangi bir polarizasyon ve frekanstaki bir elektromanyetik dalganın ( $\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}}$ ),  $\Omega_{\text{int}}$  hacmini kaplayan herhangi özellikteki bir cisim üzerine etki etmesi olarak tanımlanabilir. Cismin dışında kalan hacim  $\Omega_{\text{ext}}$  olarak tanımlandığında, problemin tanımlandığı uzay  $\Omega = \Omega_{\text{int}} \cup \Omega_{\text{ext}}$  olarak ifade edilebilir. Cismin yüzeyi de  $S(\Omega)$  olarak gösterilebilir. Toplam elektrik ve manyetik alanlar ( $\mathbf{E}^{\text{tot}}, \mathbf{H}^{\text{tot}}$ ) için yazılan Maxwell denklemlerinden,  $S(\Omega)$  üzerindeki sınır değerleri belli olan

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E}^{\text{tot}} - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E}^{\text{tot}} = 0 \quad (1)$$

şeklindeki dalga denklemi elde edilebilir. Toplam elektrik ve manyetik alanlar ile kastedilen, cisim üzerinde etki eden ve cisimden yansıyan alanların toplamıdır ( $\mathbf{E}^{\text{tot}} = \mathbf{E}^{\text{inc}} + \mathbf{E}^{\text{sct}}$  ve  $\mathbf{H}^{\text{tot}} = \mathbf{H}^{\text{inc}} + \mathbf{H}^{\text{sct}}$ ). Denklemdeki  $\epsilon_r$  ve  $\mu_r$  değerleri ise bulunulan noktada, ortamın elektriksel ve manyetik özelliklerini temsil etmektedir. Bu denklem,  $\Omega$  üzerinde tanımlı vektörel bir  $\varphi$  fonksiyonu ile içsel çarpım alınarak ve bir takım vektör eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki forma indirgenebilir:

$$\int_{\Omega_{ext}} \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E}^{tot} \right) \cdot (\nabla \times \varphi) d\Omega - \int_{S(\Omega)} \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E}^{tot} \right) \times \varphi \, ds - \int_{\Omega_{ext}} k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E}^{tot} \cdot \varphi d\Omega = 0 \quad (2)$$

Örneğin,  $\Omega_{int}$  hacmini kaplayan cismin bir dielektrik ( $\varepsilon_r$ ) olması durumunda (2) numaralı denklem aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E}^{sct} \right) \cdot (\nabla \times \varphi) d\Omega - \int_{\Omega} (k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E}^{sct}) \cdot \varphi d\Omega = \int_{\Omega_{int}} (k_0^2 (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E}^{inc}) \cdot \varphi d\Omega \quad (3)$$

### 3. Sonlu Eleman Çözümü

Bir cisimden yansıyan elektrik alan ( $\mathbf{E}^{sct}$ ), oluşturulan  $N$  kenarlı her bir eleman içinde  $\mathbf{w}_i$  baz fonksiyonları cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\mathbf{E}^{sct} = \sum_{i=1}^N \mathbf{w}_i(\mathbf{r}) E_i \quad (4)$$

Galerkin Yöntemi kullanılarak; içsel çarpımda kullanılan  $\varphi$  fonksiyonu, elektriksel alanı ifade etmeye yarayan  $\mathbf{w}_i$  baz fonksiyonlarına eşit seçilirse, (3) numaralı denklem aşağıdaki hale gelir:

$$\int_{V_i} \left( \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \sum_{n=1}^N \mathbf{w}_n E_n \right) \cdot (\nabla \times \mathbf{w}_m) dV - \int_{V_i} \left( k_0^2 \varepsilon_r \sum_{n=1}^N \mathbf{w}_n E_n \right) \cdot \mathbf{w}_m dV = \int_{V_i} (k_0^2 (\varepsilon_r - 1) \mathbf{E}^{inc}) \cdot \mathbf{w}_m d\Omega \quad (5)$$

Kenar elemanları, genel olarak bir problemde bilinmeyen vektörel büyüklüğün ilgili elemanın ‘kenar’ları üzerine izdüşümlerini temsil etmek üzere kullanılmaktadır. Herhangi bir elektromanyetik saçılım problemi altı yüzlü sonlu kenar elemanları ile çözülmek istenirse: problem geometrisi içinde  $xyz$ -uzayında tanımlı cisimler dönüşüme uğratarak  $uvp$ -uzayında  $(-1, -1, -1)$  noktasından  $(1, 1, 1)$  noktasına uzanan küpler haline getirilir.  $xyz$  ve  $uvp$  uzayları arasındaki ilişki ilgili Jacobian matrisi ile tanımlanmakta olup, formülasyonlarda geçiş bu matris vasıtasıyla yapılabilir.

8 düğüm noktası (node) ve 12 kenar ile tanımlanmış olan doğrusal altı yüzlü sonlu kenar elemanları [6] için, örneğin  $u$  yönündeki kenarlarda baz fonksiyonları şu şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{w}_i = \frac{1}{8} (1 + v_i v) (1 + p_i p) \nabla u \quad (6)$$

(6) numaralı eşitlikte  $v_i = \pm 1$  ve  $p_i = \pm 1$  olup  $i$ 'inci kenarın  $v$  ve  $p$  koordinatlarıdır.  $v$  ve  $p$  yönündeki kenarlarla ilişkili baz fonksiyonları benzer şekilde bulunabilir. Doğrusal elemanlar yüzeyleri eğri olan cisimlerin temsil edilmesinde yeteri kadar doğru sonuç veremedikleri için, bu gibi cisimlerin temsilinde ikinci dereceden altı yüzlü sonlu kenar elemanlarının kullanılması daha uygundur. Şekil 1’de, bu dönüşüm ve ilgili kenar elemanı görülmektedir. Bu kenar elemanı, Kameari tarafından 20 düğüm noktası ve 36 kenar ile tanımlanmıştır [7]. Elemanın  $u$  yönündeki kenarlarındaki baz fonksiyonları (sırasıyla fiziksel olarak kenarlarda bulunan kısa kenarlar ve yüzeylerde bulunan uzun kenarlar için) aşağıdaki gibidir:

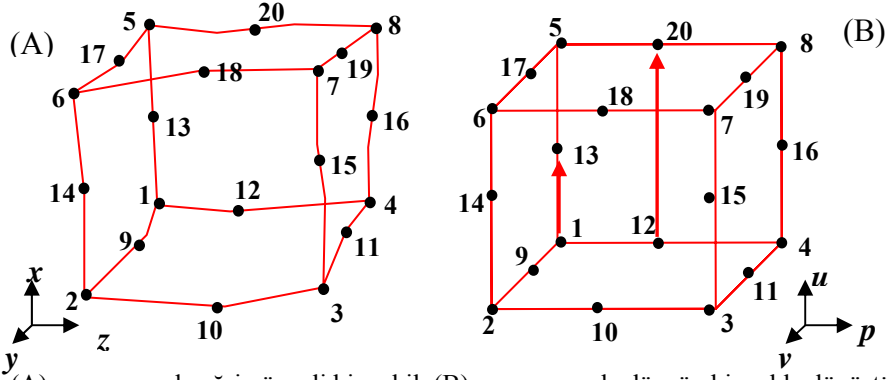
$$\mathbf{w}_i = \frac{1}{8} (1 + v_i v) (1 + p_i p) (u_i u + v_i v + p_i p - 1) \nabla u \quad (7)$$

$$\mathbf{w}_i = \frac{1}{4} (1 + p_i p) (1 - v^2) \nabla u \quad (8)$$

Yukarıdaki eşitliklerde  $u_i = \pm 1/2$ ,  $v_i = \pm 1$  ve  $p_i = \pm 1$  olup  $i$ 'inci kenarın merkez noktasının koordinatlarıdır.  $v$  ve  $p$  yönündeki kenarlarla ilişkili baz fonksiyonları benzer şekilde bulunabilir.

Sonlu eleman çözümü şu adımlar takip edilerek yapılır: Her bir eleman için ilgili denklemlerde (doğrusal elemanlar için (6), ikinci dereceden elemanlar için (7) ve (8) numaralı denklemlerde) belirtilen baz fonksiyonları hesaplanarak (5) numaralı denklemdeki integraller Gauss yöntemiyle alınır. Bütün elemanlar için elde edilen matrisler bütün geometriyi temsil edecek global sistem matrisini ve ilgili denklemi elde etmede kullanılır. Bilinen sınır değerler denklemde yerine konular ve matris denklemi çözülür. Elde edilen elektrik alandan,

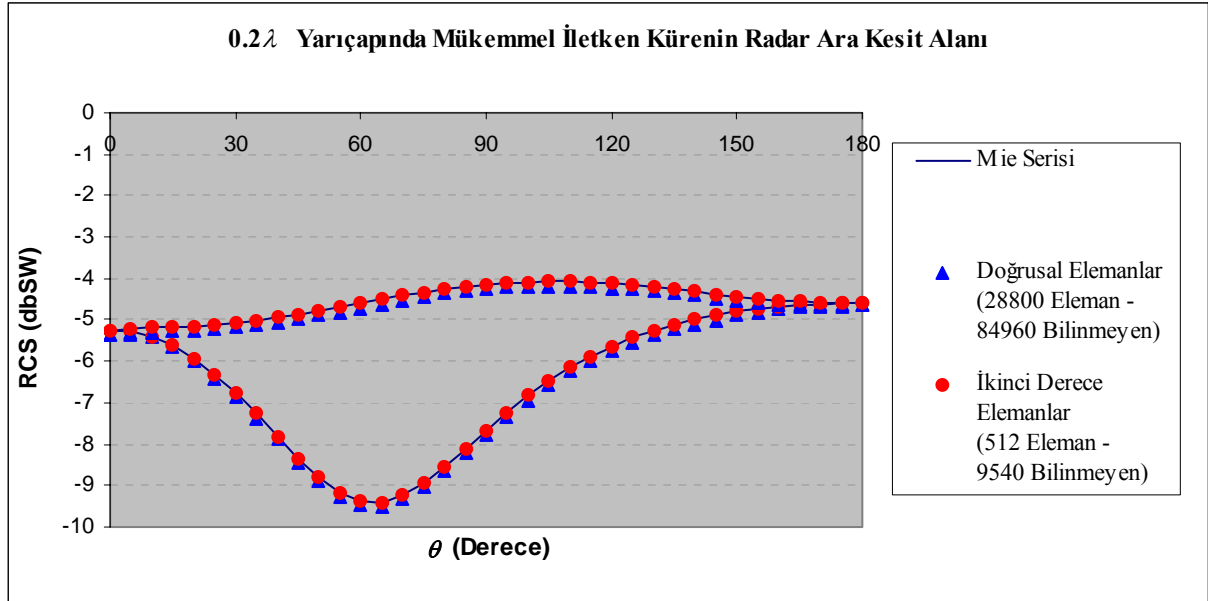
Huygens'in denklik prensibi vasıtasıyla uzak alan hesaplanır ve buradan ilgili cismin Radar Ara Kesiti (RCS) hesaplanır.



Şekil 1. (A)  $xyz$ -uzayında eğri yüzeyle bir şekil, (B)  $uvp$ -uzayında düzgün bir şekle dönüştürülmüş hali.

#### 4. Sonuçlar

Yapılmış olan çalışmada, belirli cisimler için hem doğrusal hem de ikinci dereceden altı yüzlü sonlu kenar elemanları kullanılarak Radar Ara Kesit değerleri hesaplanmış, elde edilen sonuçlar analitik çözümler ile karşılaştırılmıştır. Mükemmel elektriksel iletken bir küre için elde edilen ve Şekil 2’de verilmiş olan sonuçlarda, ikinci dereceden elemanların doğrusal elemanlara göre toplam eleman sayısı, dolayısıyla da bilinmeyen sayısı, bellek kullanımı, işlemci zamanı ve çözüm doğruluğu gibi kriterler açısından büyük bir iyileştirme sağladığı gözlenmiştir. İleride yapılacak çalışmalarda bilhassa pratik uygulamalara yönelik benzer şekilli (conformal) yapılar ile ilgili problemler çözülecektir.



Şekil 2. Mükemmel elektriksel iletken bir küre için bulunmuş olan sonuçlar.

#### Kaynaklar

- [1] R. Courant, "Variational methods for a solution...", Bull. Amer. Math. Soc., 49: s.1-23, 1943.
- [2] J. Bentley, "Programming Pearls", MA: Addison-Wesley Yayınevi, Bölüm 9, 1986.
- [3] W. H. Press, S. S. Teukolsky ve W. T. Vetterling, "Numerical Recipes in C", Cambridge Üniversitesi Yayınları, 2nci Baskı, Bölüm 2, s. 71-90, 1992.
- [4] J. P. Berenger, "A perfectly matched layer for...", J. Comp. Phys., cilt 114, s. 185-200, Ekim 1994.
- [5] W. C. Chew ve W. H. Weedon, "A 3-D perfectly...", Microwave Opt. Tech. Lett., s. 599-604, Eylül 1994.
- [6] J. S. van Welij, "Calculation of eddy current", IEEE Trans. Mag., cilt 21, No. 6, s. 2239-2241, 1985.
- [7] A. Kameari, "Calculation of Transient 3D...", IEEE Trans. Mag., cilt 26, No. 2, s. 466-469, Mart 1990.