

Düzlemsel Elektromagnetik Dalgaların Empedans Yüklü Bir Paralel Plakalı Dalga Kılavuzundan Kırınımı: Hibrid Formülasyon Yaklaşımı

Alınur Büyükkaksoy, Gökhan Çınar
Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü
Gebze, Kocaeli

Gökhan Uzgören
İstanbul Kültür Üniversitesi

Özet: Bu çalışmada iki-parçalı bir empedans düzlem ile alt ve üst yüzeyleri farklı yüzey empedanslarına sahip bir yarım-düzlemden oluşan empedans yüklü paralel plakalı dalga kılavuzundan düzlemsel elektromagnetik dalgaların kırınımı incelenmiştir. Söz konusu sınır-değer problemi alanın dalga kılavuzu oluşan bölgelerde uygun modlar cinsinden ifade edilmesine dayanan Mod-Uydurma yönteminin Fourier dönüşümü tekniği ile birlikte uygulanmasından oluşan hibrid bir formülasyon ile bir skaler Wiener-Hopf denklemine indirgenmiştir. Bu denklemin çözümü bilinen yöntemlerle elde edilmiş ve sonuç sonsuz bilinmeyenli bir lineer cebirsel denklem sistemini sağlayan katsayılar cinsinden elde edilmiştir.

1. Giriş

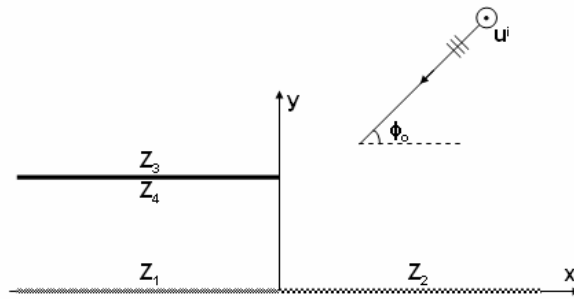
Bu çalışmada iki-parçalı bir empedans düzlem ile alt ve üst yüzeyleri farklı yüzey empedanslarına sahip bir yarım-düzlemden oluşan empedans yüklü paralel plakalı dalga kılavuzundan düzlemsel elektromagnetik dalgaların kırınımı problemi incelenmiştir. Söz konusu sınır-değer problemi, alanın dalga kılavuzu oluşan bölgelerde öz modlar cinsinden ifade edilmesine dayanan Mod-Uydurma yönteminin Fourier dönüşümü tekniği ile birlikte uygulanmasından ibaret olan karma bir formülasyon aracılığıyla bir skaler Wiener-Hopf denklemine indirgenmektedir. Söz konusu skaler Wiener-Hopf denkleminin terimleri arasında katsayıları sonsuz bilinmeyenli bir cebirsel denklem aracılığıyla çözülebilen bir sonsuz toplam da bulunmaktadır. Bu denklem sistemi sayısal yöntemlerle çözüldükten sonra değişik parametrelerin kırınımına etkisi irdelenmiştir. Çalışma boyunca elektromagnetik dalgaların zaman bağımlılığı $e^{i\omega t}$ olarak kabul edilmiştir.

2. Karma Formülasyon

Şekil 1'de görülen sistemi

$$E_z^i = u^i = \exp[-ik(x \cos \phi_o + y \sin \phi_o)] \quad (1)$$

ile gösterilen E-polarize düzlemsel dalga aydınlatınsın.



Şekil 1. Problemin geometrisi.

Toplam alan, değişik bölgelerde

$$u^T(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y) + u^i(x, y) + u^r(x, y) & , \quad y > b \\ u_2(x, y)H(-x) + u_3(x, y)H(x) & , \quad 0 < y < b \end{cases} \quad (2)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Burada

$$u^r(x, y) = \frac{\eta_3 \sin \phi_o - 1}{\eta_3 \sin \phi_o + 1} \exp\{-ik[x \cos \phi_o - (y - 2b) \sin \phi_o]\} \quad (3)$$

bağıl yüzey impedansı $Z_3 = \eta_3 Z_0$ olan düzlemde yansıyan dalgayı göstermektedir.

$0 < y < b$, $x < 0$ bölgesinde toplam alanı

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-i\beta_n x} \left[\frac{\sin \xi_n b}{\xi_n} - \frac{\eta_1}{ik} \cos \xi_n b \right] \quad (4)$$

biçiminde dalga kılavuzu modları cinsinden ifade edelim. Burada a_n ler henüz bilinmeyen açılım katsayılarını,

ξ_n ler de

$$\frac{(\eta_1 + \eta_4)}{ik} \cos \xi_n b - \left(1 + \frac{\eta_1 \eta_4}{k^2} \xi_n^2 \right) \frac{\sin \xi_n b}{\xi_n} = 0 \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

denkleminin köklerini göstermektedir. β_n ler de.

$$\beta_n = \sqrt{k^2 - \xi_n^2} \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

ile tanımlanmışlardır.

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x, y) e^{i\alpha x} d\alpha \quad G_+(\alpha) = \int_0^{\infty} u_3(x, y) e^{i\alpha x} d\alpha \quad (7,8)$$

olmak üzere, Mod-Uydurma yöntemi ve Fourier dönüşümü tekniği beraber uygulandığında ve şekilden de görülebilecek sınır-kosulları, süreklilik bağıntıları, ayırıt ve radyasyon koşulları gözönüne alındığında problem aşağıdaki Wiener-Hopf denkleminin çözümüne indirgenmektedir.

(10)

$$\frac{\chi(\eta_3, \alpha) P_+(\alpha)}{\chi(\eta_2, \alpha) N(\alpha)} + F'_-(\alpha, b) = \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\eta_3 \sin \phi_o + 1)(\alpha - k \cos \phi_o)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_m - i\alpha g_m)}{\alpha^2 - \alpha_m^2} \left(\cos K_m b + \frac{\eta_2}{ik} K_m \sin K_m b \right) \quad (11)$$

Burada $P_+(\alpha) = F_+(\alpha, b) + \frac{\eta_3}{ik} F'_+(\alpha, b)$ konmuştur.

Bu denklemde görülen $M(\alpha), N(\alpha), K(\alpha)$ ve $\chi(\eta_j, \alpha)$ fonksiyonları

$$M(\alpha) = \frac{(\eta_3 - \eta_2)}{ik} \cos Kb + \left(1 - \frac{\eta_2 \eta_3}{k^2} K^2 \right) \frac{\sin Kb}{K} \quad N(\alpha) = M(\eta_2, \alpha) e^{ikb} \quad (12a,b)$$

$$K(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2} \quad , \quad \chi(\eta_j, \alpha) = \frac{K(\alpha)}{\eta_j K(\alpha) + k} \quad (13a,b)$$

ile tanımlıdır. Bu denklem klasik Wiener-Hopf prosedürü ile çözüldüğünde

$$M(\pm \alpha_m) = 0 \quad , \quad \Im m(\alpha_m) > \Im m(k) \quad , \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

$$Q_m^2 = \frac{\left(\cos K_m b + \frac{\eta_2}{ik} K_m \sin K_m b \right)}{2K_m} \frac{\partial}{\partial K} M(\alpha) \Big|_{K=K_m} \quad (16)$$

$$P_+(\alpha_m) = - \left(\cos K_m b + \frac{\eta_3}{ik} K_m \sin K_m b \right) Q_m^2 (f_m - i\alpha_m g_m) \quad (17)$$

olmak üzere $P_+(\alpha)$ için

$$P_+(\alpha) = \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\eta_3 \sin \phi_o + 1)(\alpha - k \cos \phi_o)} \frac{\chi_-(\eta_2, k \cos \phi_o) N_-(k \cos \phi_o)}{\chi_-(\eta_3, k \cos \phi)} \frac{\chi_+(\eta_2, \alpha) N_+(\alpha)}{\chi_+(\eta_3, \alpha)} \\ - \frac{\chi_+(\eta_2, \alpha) N_+(\alpha)}{\chi_+(\eta_3, \alpha)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(f_m + i\alpha_m g_m)}{2\alpha_m (\alpha + \alpha_m)} \left(\cos K_m b + \frac{\eta_2}{ik} K_m \sin K_m b \right) \frac{\chi_+(\eta_2, \alpha_m) N_+(\alpha_m)}{\chi_+(\eta_3, \alpha_m)} \quad (18)$$

elde edilir.

Sonuç olarak kırınan alan

$$u_1(\rho, \phi) = -\frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{2k \sin \phi \sin \phi_o e^{-ikb(\sin \phi + \sin \phi_o)}}{(\eta_3 \sin \phi_o + 1)(\eta_3 \sin \phi + 1)(\cos \phi + \cos \phi_o)} \right. \\ \times \frac{\chi_-(\eta_2, k \cos \phi_o) N_-(k \cos \phi_o)}{\chi_-(\eta_3, k \cos \phi)} \frac{\chi_-(\eta_2, k \cos \phi) N_-(k \cos \phi)}{\chi_-(\eta_3, k \cos \phi)} \\ + \frac{k \sin \phi e^{-ikb \sin \phi}}{(\eta_3 \sin \phi + 1)} \frac{\chi_-(\eta_2, k \cos \phi) N_-(k \cos \phi)}{\chi_-(\eta_3, k \cos \phi)} \\ \left. \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(f_m + i\alpha_m g_m)}{2\alpha_m (\alpha_m - k \cos \phi)} \left(\cos K_m b + \frac{\eta_2}{ik} K_m \sin K_m b \right) \frac{\chi_+(\eta_2, \alpha_m) N_+(\alpha_m)}{\chi_+(\eta_3, \alpha_m)} \right\} \quad (19)$$

şeklinde bulunmuş olur.

Bulunması gereken katsayılar f_m ve g_m , $x=0$, $0 < y < b$ bölgesindeki süreklilik ilişkisi sayesinde (4)'te görülen a_n katsayıları cinsinden yazılabilmektedir. Bu ilişki gözönüne alındığında, (17) ve (18)'in bir arada düşünülmesiyle aşağıdaki sonsuz bilinmeyenli lineer cebirsel denklem elde edilir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{nj} a_n = B_j \quad (20)$$

$$A_{nj} = \left(\cos K_j b - \frac{\eta_3}{ik} K_j \sin K_j b \right) (\alpha_j + \beta_n) \Delta_{nj} \\ - i \frac{\chi_+(\eta_2, \alpha_j) N_+(\alpha_j)}{\chi_+(\eta_3, \alpha_j)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\beta_n - \alpha_m) \Delta_{nm}}{2\alpha_m (\alpha_j + \alpha_m) Q_m^2} \left(\cos K_m b + \frac{\eta_2}{ik} K_m \sin K_m b \right) \frac{\chi_+(\eta_2, \alpha_m) N_+(\alpha_m)}{\chi_+(\eta_3, \alpha_m)} \quad (21)$$

$$B_j = \frac{2k \sin \phi_o}{(\eta_3 \sin \phi_o + 1)(\alpha_j - k \cos \phi_o)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_o}}{\chi_-(\eta_3, k \cos \phi_o)} \frac{\chi_-(\eta_2, k \cos \phi_o) N_-(k \cos \phi_o)}{\chi_-(\eta_3, k \cos \phi_o)} \frac{\chi_+(\eta_2, \alpha_j) N_+(\alpha_j)}{\chi_+(\eta_3, \alpha_j)} \quad (22)$$

$$\Delta_{nm} = \frac{1}{\xi_n^2 - K_m^2} \left\{ \frac{\eta_1 - \eta_2}{ik} \right. \\ \left. + \frac{\eta_3 + \eta_4}{ik} K_m \xi_n \left(\frac{\cos \xi_n b}{\xi_n} + \frac{\eta_1}{ik} \sin \xi_n b \right) \left(\frac{\cos K_m b}{K_m} + \frac{\eta_2}{ik} \sin K_m b \right) \right\} \quad (23)$$