

Düzlemsel Dalgaların Soğuk Plazma İçerisindeki Mükemmel İletken Yarım Düzlemden Kırınımına İlişkin Sınır Değer Probleminin Çözümü

Asil Dedeoğlu, Duygu Çakır, ve A.Hamit Serbest
Elektrik – Elektronik Mühendisliği Bölümü, Çukurova Üniversitesi, Balcalı, Adana
asil@eemb.cu.edu.tr, duygu@eemb.cu.edu.tr, serbest@cukurova.edu.tr

Özet

Bu çalışmada soğuk plazma içindeki mükemmel iletken bir yarım düzlemden düzlemsel dalgaların kırınımına ilişkin sınır değer problemi incelenmiştir. Bir yarım düzlemden kırınım, kanonik bir problemdir ve çeşitli karmaşık nesnelerden saçılma problemlerinin modellenmesinde kullanılabilir. Fourier integral dönüşümü ile formüle edilen söz konusu sınır değer problemi özel formdaki bir matris Wiener-Hopf denklemi vermiştir. Çekirdek matrisin özelliği nedeniyle problem iki skaler Wiener-Hopf denklemine indirgenmiş ve standard yöntemle çözülebilmektedir.

1. Giriş

Elektromanyetik dalgaların iyonize olmuş bir gaz boyunca yayılımı uzun yıllardır araştırmacıların ilgisini çekmiş; özellikle, radyo dalgalarının iyonosfer boyunca yayılımı ve iyonosferden yansımaları detaylı bir şekilde incelenmiştir. Ayrıca, iyonosfer içindeki uyduların anten davranışları ve dalga yayılım karakteristikleri dünya ve uydu arasındaki haberleşmede önemli bir yer tutmaktadır. Bilindiği üzere; plazma, elektron ve iyon yoğunluklarının aynı olduğu ve elektriksel olarak nötr olan iyonlaşmış bir gazdır. DC manyetik alanı genellikle plazmada bulunur ve onun varlığı plazmayı anizotrop yapar; örneğin, iyonosferde dünyanın manyetik alanı etkindir. Eğer küçük ve sonlu sıcaklık ve basınç değişikliklerinin etkisi ihmal edilebilir alınırsa, iyonosfer de soğuk plazma olarak kabul edilebilir[1].

Böyle bir ortam içinde $y = 0$ ve $x \in (-\infty, 0)$ da yerleştirilmiş olan mükemmel iletken yarım düzlemin

$$\vec{H}^i = \vec{e}_z \exp \left[-ik \left(x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0 \right) \right] \quad (1)$$

gelen alan ile aydınlatıldığı varsayılmaktadır. Manyetik alanın büyüklüğü 1 A/m dir ve ϕ_0 x eksenine ile yapılan geliş açıdır. Bilindiği üzere, Maxwell denklemleri plazma içinde tensör dielektrik permitivitesi ile geçerlidir ve aşağıdaki ifadeler bu koşul altında elde edilmiştir. Zamana bağımlılık $\exp(-i\omega t)$ olarak alınmıştır ve analiz sırasında gösterilmemiştir. Maxwell denklemleri kullanılarak elektrik alan bileşenleri manyetik alan H_z 'ye bağlı olarak

$$E_x = \frac{i\varepsilon_1}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\varepsilon_2}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad E_y = \frac{\varepsilon_2}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{i\varepsilon_1}{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2)$$

şeklinde yazılır. Burada, ε_0 boşluğun dielektrik sabitini göstermekte ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ de plazmanın dielektrik tensörünün sıfırdan farklı terimleridir. H_z 'nin sağladığı denklem ise

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} \right) H_z = 0 \quad (3)$$

olarak bulunur, burada yayılım sabiti $k^2 = k_0^2 \cdot k_p$ ve $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ ve $k_p = \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1}$ dir. Toplam alan gelen alan ve saçılan alanın toplamı şeklinde alınırsa

$$E^i(H^i) = E^i(H^i) + E(H^s) \quad (4)$$

yazılır. Mükemmel iletken yarım düzleme ilişkin sınır koşulu olarak $(E_x)^t = 0$ uygulanırsa

$$\frac{\partial H_z^i(x, y)}{\partial y} - i \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\partial H_z^i(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

elde edilir. Saçılan alan aşağıda verilen integral denklemler ile ifade edilebilir:

$$H_z(x, y) = \begin{cases} \int_L^L [A(\alpha) e^{i\Gamma(\alpha)y}] e^{-i\alpha x} d\alpha, & y > 0 \\ \int_L^L [B(\alpha) e^{-i\Gamma(\alpha)y}] e^{-i\alpha x} d\alpha, & y < 0 \end{cases} \quad (6)$$

Burada $\Gamma(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$ $\Gamma(0) = +k$ ve $\alpha \rightarrow \infty$ için $\Gamma(\alpha) = i|\alpha|$, ile uygun olarak kesilmiş α - düzleminde tek değerli olarak tanımlanmıştır. İntegrasyon çizgisi L regülerlik bandındaki, $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$, reel eksene paralel herhangi bir düz doğrudur.

2. Problemin Formülasyonu ve Çözümü

Bilinmeyen spektral fonksiyonlar $A(\alpha)$ ve $B(\alpha)$ sınır ve süreklilik koşulları yardımıyla bulunacaklardır. Alan ifadeleri için yazılan integrallere sınır koşulları uygulandıktan sonra ters Fourier transformu alınır. Daha sonra ortaya çıkan denklemlerin toplanıp çıkartılması ve spektral katsayıların elimine edilmesiyle

$$[i\Gamma(\alpha)]L_1(\alpha) + \left[-\frac{1}{i\Gamma(\alpha)}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\alpha\right]L_2(\alpha) = \hat{U}_1(\alpha) + \hat{F}_1(\alpha) \quad (7)$$

$$\left[-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\alpha\right]L_1(\alpha) + L_2(\alpha) = \hat{U}_2(\alpha) + \hat{F}_2(\alpha) \quad (8)$$

$$\hat{U}_1(\alpha) = U_1(\alpha) + U_2(\alpha), \hat{U}_2(\alpha) = U_1(\alpha) - U_2(\alpha), \hat{F}_1(\alpha) = F_1(\alpha) + F_2(\alpha), \hat{F}_2(\alpha) = F_1(\alpha) - F_2(\alpha)$$

denklemleri yazılır. $\hat{F}_{1,2}(\alpha)$ kaynak fonksiyonlarının katkısını göstermektedir ve şu şekilde tanımlanmıştır.

$$\hat{F}_1(\alpha) = \frac{ik \sin \phi_0 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}k \cos \phi_0}{i\pi(\alpha - k \cos \phi_0)} \text{ ve } \hat{F}_2(\alpha) = 0 \quad (9)$$

Bilinmeyen spektral fonksiyonlar $L_{1,2}(\alpha)$ kompleks α -düzleminin alt yarı bölgesinde, ($\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k \cos \phi_0)$) regülerdir ve $\hat{U}_{1,2}(\alpha)$ da kompleks α -düzleminin üst yarı bölgesinde ($\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$) regülerdir. Bu çiftli denklem sistemi matris Wiener-Hopf sistemi olarak bilinir. Bu sistem matris formda şöyle yazılabilir

$$G(\alpha)L(\alpha) = \hat{U}(\alpha) + \hat{F}(\alpha), \quad G(\alpha) = \begin{pmatrix} i\Gamma(\alpha) & i\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \\ -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\alpha & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Bu matris Wiener-Hopf denklemi Daniele-Khrapkov yöntemi ile çözülebilecek formdadır; ama çekirdek matrisin özel durumu nedeniyle kuplajı kaldırarak iki ayrı skaler denklem olarak da çözmek mümkündür. Bunun için

$$\left[-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\alpha\right]L_1(\alpha) + L_2(\alpha) = L'(\alpha) \quad (11)$$

yazılarak

$$L'(\alpha) = \hat{U}_2(\alpha) = P_1(\alpha) \quad (12)$$

denklemini elde edilir, buradaki $P_1(\alpha)$ alan bileşenlerinin ayrıştıktaki davranışları kullanılarak belirlenecek olan bir tam fonksiyondur ve sifıra eşittir. Böylece, $L_1(\alpha)$ ve $L_2(\alpha)$ arasındaki ilişki kullanılarak (7) denklemi

$$\frac{i}{\Gamma(\alpha)}\left\{k^2 - \left[1 + (\varepsilon_2/\varepsilon_1)^2\right]\alpha^2\right\}L_1(\alpha) = \hat{U}_1(\alpha) + \hat{F}_1(\alpha) \quad (13)$$

şeklinde yazılır. Böylece,

$$G_1(\alpha) = -\frac{i}{\Gamma(\alpha)}\left[1 + (\varepsilon_2/\varepsilon_1)^2\right]\left\{\alpha^2 - \frac{k^2}{\left[1 + (\varepsilon_2/\varepsilon_1)^2\right]}\right\} \quad (14)$$

olmak üzere, Wiener-Hopf denklemi

$$G_1(\alpha)L_1(\alpha) = \hat{U}_1(\alpha) + \hat{F}_1(\alpha) \quad (15)$$

olarak yazılır. Wiener-Hopf denkleminin çözümü öncelikle $G(\alpha)$ çekirdeğinin $G_1(\alpha) = G_{1U}(\alpha)G_{1L}(\alpha)$ şeklinde yazılmasını gerektirir. Burada $G_{1U}(\alpha)$ ve $G_{1L}(\alpha)$ ve tersleri, sırasıyla, kompleks düzlemin bir üst ve alt yarısında regüler fonksiyonlardır.

$$G_{1U,1L}(\alpha) = e^{i3\pi/4} \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2\right]^{1/2} \frac{\left\{\alpha \pm \frac{k}{\left[1 + (\varepsilon_2/\varepsilon_1)^2\right]^{1/2}}\right\}}{\sqrt{k \pm \alpha}} \quad (16)$$

Böylece, (15) denkleminde bazı basit cebirsel işlemlerden sonra

$$G_{1U}^{-1}(\alpha)\hat{F}_1(\alpha) = H(\alpha) = H_U(\alpha) + H_L(\alpha) \quad (17)$$

yazılabilir. Toplam şeklinde faktörize edebilmek için bilinen integral tanım kullanılacak olursa

$$\begin{aligned} H_U(\alpha) &= \frac{[ik \sin \phi_0 + (\varepsilon_2/\varepsilon_1)k \cos \phi_0]}{i\pi(\alpha - k \cos \phi_0)} \left[\frac{\sqrt{k+\alpha}}{\alpha + \frac{k}{\sqrt{1+(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^2}}} - \frac{\sqrt{k \cos \phi_0 + k}}{k \cos \phi_0 + \frac{k}{\sqrt{1+(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^2}}} \right] \\ H_L(\alpha) &= \frac{[ik \sin \phi_0 + (\varepsilon_2/\varepsilon_1)k \cos \phi_0]}{i\pi(\alpha - k \cos \phi_0)} \left[\frac{\sqrt{k \cos \phi_0 + k}}{k \cos \phi_0 + \frac{k}{\sqrt{1+(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^2}}} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

şeklinde bulunur. Analitik devam ilkesi kullanılarak bir $P_2(\alpha)$ tam fonksiyonu

$$P_2(\alpha) = \begin{cases} G_{1U}^{-1}(\alpha) \hat{U}_1(\alpha) + H_U(\alpha), & \alpha \in R_U \\ G_{1L}(\alpha) L_1(\alpha) - H_L(\alpha), & \alpha \in R_L \end{cases} \quad (19)$$

tanımlanır ve $\alpha \rightarrow \infty$ durumunda yine ayrıt koşulları uyarınca $P_2(\alpha) \rightarrow 0$ olur ve bu Liouville teoremine göre

$P_2(\alpha) \equiv 0$ olması demektir. Böylece,

$$\begin{aligned} \hat{U}_1(\alpha) &= -G_{1U}(\alpha) H_U(\alpha), \quad \alpha \in R_U \\ L_1(\alpha) &= G_{1L}^{-1}(\alpha) H_L(\alpha), \quad \alpha \in R_L \end{aligned} \quad (20)$$

çözümleri elde edilir, ve buradan

$$\begin{aligned} \hat{U}_1(\alpha) &= - \left(\frac{[ik \sin \phi_0 + (\varepsilon_2/\varepsilon_1)k \cos \phi_0]}{i\pi(\alpha - k \cos \phi_0)} \left[\frac{\sqrt{k+\alpha}}{\alpha + \frac{k}{\sqrt{1+(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^2}}} - \frac{\sqrt{k \cos \phi_0 + k}}{k \cos \phi_0 + \frac{k}{\sqrt{1+(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^2}}} \right] \right) \left(\frac{\alpha + \frac{k}{\sqrt{1+(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^2}}}{\sqrt{k+\alpha}} \right) \\ L_1(\alpha) &= \left(\frac{[ik \sin \phi_0 + (\varepsilon_2/\varepsilon_1)k \cos \phi_0]}{i\pi(\alpha - k \cos \phi_0)} \left[\frac{\sqrt{k \cos \phi_0 + k}}{k \cos \phi_0 + \frac{k}{\sqrt{1+(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^2}}} \right] \right) \left(\frac{i\sqrt{k-\alpha}}{\left[\alpha - \frac{k}{\sqrt{1+(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^2}} \right] \sqrt{1+(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^2}} \right) \end{aligned}$$

yazılır.

3.Sonuç

Soğuk plazma içindeki empedanslı yarım düzlemden saçılma problemi Ş. Yener tarafından incelenmiştir[2]. Söz konusu problemin formülasyonu bir matris Wiener-Hopf denklemi vermiş ve bilinen yöntemlerle problemi çözülebilir kılmak için $(\varepsilon_2/\varepsilon_1)$ 'in çok küçük olduğu frekans aralığında inceleme yapılmıştır. Bu sonuç, gerçekte yerin manyetik alanının sıfır kabul edilmesi halinde de elde edilebilmektedir, ve bu zorluk yapılan çalışmada da dile getirilmiştir. Ancak, burada empedanslı yarım düzlem yerine mükemmel yarım düzlem alınarak soğuk plazmanın anizotropluk özelliklerinin etkisini tam olarak göstermek mümkün olacaktır.

Kaynaklar

- [1] L. B. Felsen ve N. Marcuvitz Radiation and Scattering of Waves, Prentice-Hall, Nem Jersey, 1973.
- [2] Ş. Yener and A. Hamit Serbest, "Diffraction of Plane Waves by an Impedance Half-Plane in Cold Plasma", Journal of Electromagnetic Wave Applications, Vol. 16, No. 7, pp. 995 – 1005, 2002.