

# Dalga Yayılımı İçin Bir Yeni Karakteristik Zamanda Sonlu Farklar (FDTD) Yöntemi

Mehmet ÇIYDEM, S. Sencer KOÇ  
Orta Doğu Teknik Üniversitesi  
Elektrik-Elektronik Mühendisliği  
İnönü Bulvarı, 06520, Balgat, Ankara  
[mciydem@tusas.com.tr](mailto:mciydem@tusas.com.tr) , [skoc@metu.edu.tr](mailto:skoc@metu.edu.tr)

**Özet:** *Uzay-zaman domeninde Geometrik Optik (GO) disiplinin araçlarını kullanarak, elektromanyetik alanların ve bunların türevlerindeki kesintileri (discontinuities) yüksek dereceli iletim denklemleri ile taşıyıp, zamana bağımlı elektromanyetik alan çözümlerinin Taylor serisi ile oluşturulması gösterilmiştir. Önerilen yöntemi gerçeklemek için; orijindeki Hertzian dipolden, homojen yönbağımsız ortamda uzaya yayılan elektromanyetik alanlar iki yöntemle küresel koordinatlarda hesaplanmıştır: İlkinde kesintiler; türev tipi iletim denklemleriyle doğrudan, ikincisinde ise; türev ve integral tipi yardımcı vektör iletim denklemleri aracılığıyla taşınmıştır. Zamanda ileri farklar, uzayda merkezi farklar nümerik yöntemleri uygulanmıştır. Benzetim sonuçları analitik sonuçlarla karşılaştırılarak, yöntemlerin etkin sonuçlar verdiği görülmüştür.*

## 1.Giriş

Hiperbolik, kısmi türev Maxwell denklemleri elektromanyetikde başlangıç-sınır değer problemlerini tanımlar[1]. 1873’de ortaya konmasına rağmen, pek az durum için zamana bağımlı analitik çözümleri bilinmektedir. Bu nedenle genelde frekans domende analitik/nümerik çalışmalar yapılmıştır. Son yıllarda ise, avantajlarından dolayı, uzay-zaman domeninde nümerik çalışmalar yoğunlaşmıştır.

Yee’nin 1966’daki makalesi[2], Maxwell denklemlerin uzay-zaman domeninde nümerik yöntemlerle çözümü konusunda bir ilkidir. Taflove’un makalesini[3] takiben de, bu alanda her yıl artan miktarlarda yayınlar olmuştur. Geliştirilen yöntemler (FDTD, TLM, FVTD vb.) etkin çözümler üretmekle beraber, iyileştirmeye muhtaç yanları vardır: Maksimum zaman adımı ( $\Delta t$ ), ızgara aralıklarına ( $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ) bağımlı ve Courant-Friedrich-Levy (CFL) kararlılık koşulu ile sınırlıdır. Genelde koşullu kararlı algoritmalar geliştirilmiştir[4]. Hesaplama domenin ayrıklaştırılmasından kaynaklanan nümerik saçınım vardır. Hesaplama domeni sınır koşulları nümerik olarak ideal tanımlanamadığından, istenmeyen yansımalar olur[4]. Bunlar iç kısımlara da yayılıp nümerik doğruluğu azaltır ve dalga genliğini modüle eder. 60dB mertebesinde dinamik aralığın gerektiği radar kesit alanı (RKA) benzetimlerinde bu yansımalar ciddi bir problemdir. Nümerik doğruluk aynı zamanda ızgara aralıklarının dalgaboyuna oranına da bağımlıdır. Ayrıca bu yöntemlerin, çok sayıda değişkenin hesaplanması, hafızada tutulması, büyük matrislerin tersinin alınması gibi ağır hesaplama yükleri olabilmektedir.

Akışkanlar dinamiğinde de Euler denklemini nümerik yöntemlerle çözmeye yönelik araştırmalar yapılmıştır. Aynı tip kısmi türev denklemler olduklarından, Euler denklemi için geliştirilen karakteristik tabanlı yöntemlerin Maxwell denklemlerine de uygulanabilirliği denenmiştir[5],[6],[7]. Yöntemin esası; Maxwell denklemlerini herbir boyutta yaklaşık Riemann probleme indirgemek ve ardışık olarak tek boyutta FDTD, FVTD vb. nümerik yöntemler ile çözmektir. Riemann problemin özdeğerleri reel olup, karakteristikler üzerinde dalga yayılım yönü ve hızını verir[8]. Kesintiler karakteristikler boyunca yayılır. Alanlar ve onları yaratan etki açısından bakıldığında, karakteristik çizgilerle sınırlanmış bir etki domeni vardır. Bu yöntemler, elektromanyetik dalga yayılımın fizikine uygun bir modeldir ve nümerik uygulamada avantajlar sağlar: daha kararlı (koşullu/koşulsuz), doğru değerler üreten belirtik/örtük algoritmalar üretilmiştir[5],[6],[7]. Sınır koşulları nümerik olarak ideale yakın tanımlanabilir[5]. Değişkenler kuple olmayarak, hesaplama yükü azaltılabilir. Karakteristikler sayesinde, lineer-eğrisel koordinatlarda, ızgara yapısı ile karmaşık geometrileri örtüştürmek dönüşümler ile mümkündür[4]. Yöntemin dezavantajı: Maxwell denklemlerini ancak bir boyutta köşegenleştirebilmesidir. Yazarların bilgisi dahilinde, iki ve üç boyutta bu denklemlerin köşegenleştirilmesi henüz yapılamamıştır.

Bu çalışmada; yukardaki yöntemlerin aksine, Maxwell denklemlerin uzay-zaman domeninde doğrudan, nümerik çözümüne girilmiştir. Fakat GO’deki dalgaöncüleri ve ışın çizgilerini kullanıp, GO alan üzerine, zaman domeninde iyileştirmeler yaparak, Maxwell denklemleri sağlayan alan çözümleri elde edilmiştir.

## 2.Kuramsal Çalışmalar

Zamana bağımlı Maxwell denklemleri kaynak olmayan yönbağımsız ortamda (1) ile verilir. Bunların uzay-zaman domeni çözümünde, alanlar ve alanların türevlerindeki kesintiler, kesinti hiperyüzeyleri (karakteristikler) üzerinde olup, bikarakteristik çizgileri takip ederek yayılır[8],[9]. Karakteristiklerin ve bikarakteristiklerin uzay domenine izdüşümleri dalgaöncüleri  $\varphi$  ve ışın çizgileridir. GO kuramına göre, elektromanyetik alanlar ışın çizgilerini takip eder ve dalgaöncüleri de Eikonal koşulunu sağlar. Kesintiler (2)'deki gibi tanımlanır [9]:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial(\mu\vec{H})}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial(\epsilon\vec{E})}{\partial t} \quad (1)$$

$$\vec{A}_v(\vec{R}, t) = \left[ \frac{\partial^v \vec{E}(\vec{R}, t)}{\partial t^v} \right], \quad t = \frac{\varphi}{c}, \quad v \geq 0 \quad (2)$$

$$\vec{B}_v(\vec{R}, t) = \left[ \frac{\partial^v \vec{H}(\vec{R}, t)}{\partial t^v} \right], \quad t = \frac{\varphi}{c}, \quad v \geq 0$$

$v=0$ 'a karşılık gelen kesintiler GO alanlardır ve dalgaöncüsüne dik yönde yayılırlar. Yönbağımsız ortamda ışın çizgileri dalgaöncülerine dik eğrilerdir. Homojen ortamda bu eğriler düz çizgilere dönüşür. Elektrik alan kesintileri ışın çizgileri boyunca (3)'deki yüksek dereceli iletim denklemlerine göre taşınır[9]. Manyetik alan kesintileri için de benzer formüller yazılabilir[9]. Elektrik ve manyetik alan kesintileri kuple olmayıp, bağımsız olarak hesaplanır. Bu denklemlerin dikkat çekici özelliği, sıradan adi türev denklemleri ve özyineli (recursive) olmalarıdır. Burada  $\tau=nds$  olup, ışın çizgisi üzerinde bir parametre ve  $t$  ile  $\tau=ct/(\epsilon\mu)$  şeklinde ilintilidir.  $s$  ark uzunluğu,  $n$  ortamın indeksidir.  $v=0$  için homojen,  $v>0$  için homojen olmayan denklemler elde edilir.

$$2\frac{d\vec{A}_v}{d\tau} + \vec{A}_v \Delta_\mu \varphi + \frac{2}{n} (\vec{A}_v \cdot \vec{\nabla} n) \vec{\nabla} \varphi = -\vec{C}_v \quad (3)$$

$$\Delta_\mu \varphi = \mu \left( (\varphi_x/\mu)_x + (\varphi_y/\mu)_y + (\varphi_z/\mu)_z \right), \quad \vec{C}_v = \mu \vec{\nabla} \times \left( (1/\mu) \vec{\nabla} \times \vec{A}_{v-1} \right) - \vec{\nabla} \left( (1/\epsilon) \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{A}_{v-1}) \right)$$

Kesintiler bir başka yöntemle de şöyle taşınabilir[9]: ışın çizgisinde  $\tau_0$  başlangıç noktasında  $v=0$  için kesintiler ve bu kesintilere ait elektromanyetik enerji yoğunlukları bilinir ve (4)'e göre yardımcı vektörler bulunur. Bu yardımcı vektörler (5) kullanılarak ışın çizgisinde  $\tau(x,y,z)$  noktasına taşınır. GO'da kullanılan ışın tüpü tekniği ile o noktadaki elektromanyetik enerji yoğunluğu ve bilahare de kesintiler tekrar (4) ile hesaplanır.

$$\sqrt{\epsilon} \vec{A}_v = \sqrt{4\pi W_v} \vec{P}_v, \quad \sqrt{\mu} \vec{B}_v = \sqrt{4\pi W_v} \vec{Q}_v, \quad \frac{W_v(\tau)}{n(\tau)K(\tau)} = \frac{W_v(\tau_0)}{n(\tau_0)K(\tau_0)} \quad (4)$$

$$2\frac{d\vec{P}_v}{d\tau} + \frac{2}{n} (\vec{P}_v \cdot \vec{\nabla} n) \vec{\nabla} \varphi = 0, \quad 2\frac{d\vec{Q}_v}{d\tau} + \frac{2}{n} (\vec{Q}_v \cdot \vec{\nabla} n) \vec{\nabla} \varphi = 0 \quad (5)$$

Müteakiben;  $v>0$  için yardımcı vektörler ve kesintiler (4) ve (6) ile hesaplanır.  $v>0$  manyetik alan kesintilerinin hesaplanmasını sağlayan yardımcı vektörlerin iletimi için formüller (6)'ya benzer yazılabilir[9].  $W_v$   $v$ 'nci kesintiye ait enerji yoğunluğu,  $K$  dalgaöncüsüne ait Gaussian eğrilmedir.

$$\vec{P}_v \cdot \hat{p} = -\frac{1}{4} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\pi W_v}} \hat{p} \cdot \vec{C}_v d\tau + (\vec{P}_v \cdot \hat{p})_{\tau_0}$$

$$\vec{P}_v \cdot \vec{P}_0 = -\int_{\tau_0}^{\tau} \left\{ \frac{\sqrt{\epsilon}}{4\sqrt{\pi W_v}} \vec{C}_v + (\vec{P}_v \cdot \hat{p}) \vec{\nabla} n \right\} d\tau + (\vec{P}_v \cdot \vec{P}_0)_{\tau_0} \quad (6)$$

$$\vec{P}_v \cdot \vec{Q}_0 = -\int_{\tau_0}^{\tau} \left\{ \frac{\sqrt{\epsilon}}{4\sqrt{\pi W_v}} \vec{C}_v + (\vec{P}_v \cdot \hat{p}) \vec{\nabla} n \right\} d\tau + (\vec{P}_v \cdot \vec{Q}_0)_{\tau_0}$$

$\hat{p} = \vec{\nabla} \varphi / n$  olup, dalgaöncüsüne dik ve ışın çizgisi yönünde birim vektördür.  $v=0$  için yardımcı vektörler buna ve birbirine dik, enine(transverse) vektörlerdir.  $(\hat{p}, \vec{P}_0, \vec{Q}_0)$  ışın çizgisi boyunca hareket eden ortogonal vektör setidir. integral denklemleri ile diğer yardımcı vektörlerin bu vektörler üzerine izdüşümleri bulunur.

Yukarıdaki iki yöntemle de kesintiler ışın çizgileri üzerinde taşındıktan sonra, uzayda herhangi bir noktada ve t anında ( $t > t_0$ ) elektromanyetik alan değerleri Taylor serisi kullanılarak hesaplanır. Manyetik alan için de aynı Taylor serisi geçerlidir[9]. Burada Taylor serisi tek taraftan ( $t > t_0$ ) yakınsaktır. ( $t < t_0$ ) için yakınsayabilir ancak anlamlı gerçek bir elektromanyetik alanı ifade etmez.

$$\vec{E}(\vec{R}_0, t) = [\vec{E}(\vec{R}_0, t_0)] + \left[ \frac{\partial \vec{E}(\vec{R}_0, t_0)}{\partial t} \right] (t - t_0) + \left[ \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{R}_0, t_0)}{\partial t^2} \right] \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \dots \quad (7)$$

Taylor serisindeki ilk terim GO elektrik alanı ifade eder ve Luneberg-Klein serisinde yine GO alanı veren ilk terimin zamanda karşılığıdır. Serideki diğer terimler zaman domende GO alanın üzerine iyileştirmelerdir.

### 3. Benzetim Çalışmaları

Benzetimler homojen ortamda ( $\epsilon = \text{sabit}$ ,  $\mu = \text{sabit}$ ) yapıldığından, (3), (5) ve (6) daha basit hale dönüşürler. Küresel koordinatlarda orijindeki Hertzian dipol kaynak için bu ortamdaki dalgaöncüleri  $\varphi = (\epsilon_r \mu_r)^{1/2} R$  küreleri ve ışın çizgileri de orijinden geçen,  $\varphi$ 'ya dik düz radyal çizgilerdir. Hertzian Dipol'un  $e^{j\omega t}$  kaynak için yönbağımsız, homojen ortamdaki frekans domen alanları (8)'deki gibidir[1]. Dürtü ( $\delta(t)$ ) kaynak için zamana bağımlı alanlar ters Fourier dönüşümü ile (9) olarak bulunur. Idl kaynağın şiddeti,  $Z = \epsilon/\mu$  dalga empedansdır.

$$E_\theta(\vec{R}) = \frac{ZIdl \sin\theta}{4\pi R} \left[ jk + \frac{1}{R} + \frac{1}{jkR^2} \right] e^{-jkR}, \quad E_R(\vec{R}) = \frac{ZIdl \cos\theta}{4\pi R} \left[ \frac{2}{R} + \frac{2}{jkR^2} \right] e^{-jkR} \quad (8)$$

$$H_\varphi(R) = \frac{Idl \sin\theta}{4\pi R} \left[ jk + \frac{1}{R} \right] e^{-jkR}$$

$$E_\theta(\vec{R}, t) = \frac{ZIdl \sin\theta}{4\pi R} \left\{ \delta'(t - R/c) + \frac{1}{R} \delta(t - R/c) + \frac{1}{R^2} u(t - R/c) \right\}$$

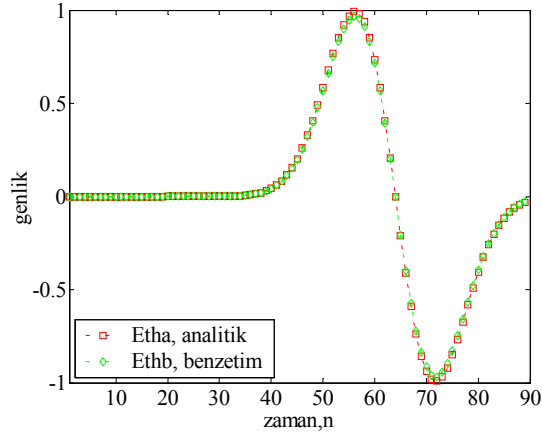
$$E_R(\vec{R}, t) = \frac{ZIdl \cos\theta}{4\pi R} \left\{ \frac{2}{R} \delta(t - R/c) + \frac{2}{R^2} u(t - R/c) \right\}, \quad (9)$$

$$H_\varphi(\vec{R}, t) = \frac{Idl \sin\theta}{4\pi R} \left\{ \delta'(t - R/c) + \frac{1}{R} \delta(t - R/c) \right\}$$

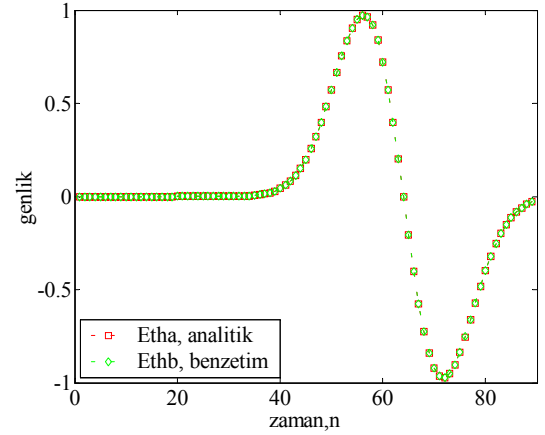
Elektromanyetik alanlar ve bu alanların türevlerindeki kesintiler darbe türevinden (doublet) gelir. Elektrik alan için  $v > 2$ , manyetik alan için  $v > 1$  için kesinti terimleri sona erer. Nihayetinde aşağıdaki kesintiler elde edilir :

$$\begin{aligned} \vec{A}_0(\vec{R}) &= \frac{ZIdl \sin\theta}{4\pi R} \hat{\theta}, & \vec{A}_1(R) &= \frac{ZIdl}{4\pi} \left\{ \frac{2 \cos\theta}{R^2} \hat{R} + \frac{\sin\theta}{R^2} \hat{\theta} \right\}, & \vec{A}_2(\vec{R}) &= \frac{ZIdl}{4\pi} \left\{ \frac{2 \cos\theta}{R^3} \hat{R} + \frac{\sin\theta}{R^3} \hat{\theta} \right\} \\ \vec{B}_0(\vec{R}) &= \frac{Idl \sin\theta}{4\pi R} \hat{\phi}, & \vec{B}_1(\vec{R}) &= \frac{Idl}{4\pi} \left\{ \frac{\sin\theta}{R^2} \hat{\phi} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

Kaynakta Gaussian darbe kullanılmıştır. Bu nedenle (9)'daki ifadeler Gaussian darbe ile evrişim (convolution) yapılır. Evrişim sonucunda kesintiler uzayda sabit bir noktada zamansal olarak Gaussian darbe türevi içerirler. Gaussian darbenin maksimum frekansı 1GHz ve zaman adım aralığı  $\Delta t = 1.25 \times 10^{-10}$  olarak seçilmiştir. Dolayısıyla ışın çizgisi üzerinde adım aralığı  $\Delta R = c\Delta t$  olmuştur. İfadeler  $\phi$  koordinat değişkeninden bağımsız olup, yükselme (elevation) açısız adım aralığı  $\Delta\theta = \pi/90$  alınmıştır. Zamanda ileri farklar ve uzayda merkezi farklar nümerik yöntemleri uygulanmıştır. Benzetimlerde kaynaktan belli bir uzaklıkta dalgaöncüsündeki kesintiler analitik olarak tanımlanmış ve başlangıç değerleri olarak alınmıştır. ( $t < t_0$ ) için Taylor serisindeki kesintiler sıfırdır çünkü kesintiler henüz  $\varphi = ct_0$  dalgaöncüsüne ulaşmamıştır. Uzaya yayılım probleminde beklendiği gibi serideki GO terim çok baskındır diğer terimlerin hemen hemen hiç etkisi yoktur. Benzetim sonuçlarında da bu gözlemlenmiştir. Yardımcı vektörler aracılığı ile kesintilerin taşınması yöntemi, enerjiler korunduğu için, nümerik olarak daha karardır. Yayılan dalga ( $E_\theta$ ), hesaplama domeninde sabit bir noktada, zamana bağımlı hesaplanmış ve sonuçlar Şekil-1 ve Şekil-2'de normalize edilerek sunulmuştur.



Şekil-1: Kesintilerin doğrudan taşınmasıyla hesaplanan  $E_0$



Şekil-2: Kesintilerin yardımcı vektörler ile taşınmasıyla hesaplanan  $E_0$

#### 4.Sonuçlar ve Öneriler

Maxwell denklemleri köşgenleştirmeye ihtiyaç duymaksızın, kesintilerin ışın çizgisi üzerinde taşınmasıyla tek boyutlu problem gibi uzay-zaman domeninde çözülmüştür. Bu yöntemle, Giriş'te bahsedilen geçmiş yöntemlerin avantajları muhafaza edilip, dezavantajlarından kaçınılmıştır. Elektrik ve manyetik alanlar kuple olmadığından, bağımsız olarak hesaplanabilmektedir. Hesaplama yükü ve hafıza gereksinimi diğer yöntemlerden daha fazla değildir. Karakteristik tabanlı yöntem olduğu için nümerik yöntemlerin kararlılığı ve doğruluk avantajları mevcuttur. Sommerfeld ışına koşulu tek boyutta yazılabildiği için, hesaplama domeni sınırlarında kesinti değerlerini sıfır almak, yansıma olmamasını sağlamıştır. Hesaplama domenin ayrıklaştırılmasından kaynaklanan nümerik saçınımdan kaçınılmıştır. Lineer-eğrisel koordinatlarda, ızgara yapısıyla karmaşık geometrileri örtüşürmek dönüşümler ile mümkündür. Uyarlamalı ve düzgün olmayan ızgara uygulamalarına elverişlidir. Önerilen yöntemle her noktada, zamana bağımlı elektromanyetik alanlar hesaplanabilir. Bu, Zamanda Işın Optik (TDRO:Time Domain Ray Optics) olarak adlandırılabilir. Çünkü sadece GO kesintisi değil, diğer kesintiler de taşınmaktadır. Öte yandan, belli bir bölgeyle ilgilenecek, oraya gelen ışın çizgilerinden elektromanyetik alanlar hesaplanabilir, buna da Zamanda Işın İzleme (TDRT:Time Domain Ray Tracing) diyebiliriz.

Gelecekte; önerilen yöntemin hata, kararlılık ve nümerik saçınım analizleri ve homojen olmayan ortamlarda, gelişigüzel biçimdeki dalgaöncüleri, ışın çizgileriyle ve karmaşık kaynak geometrileri ile daha genel yayılım problemlerinin benzetimleri yapılacaktır. Kesintiler, dalgaöncüleri ve ışın çizgileri kaynakla ilintilendirilecektir. Yönbağımlı ortamlar için de çözümler üretilecektir. Diğer elektromanyetik olaylar (yansıma, kırılma ve kırınım) çözülecektir. Böylece tüm elektromanyetik olayların önerilen yöntemle zamanda incelenmesi hedeflenmektedir.

#### Kaynaklar :

- [1] R. F. Harrington, "Time-Harmonic Electromagnetic Fields", McGraw Hill, New York, 1961.
- [2] K. S. Yee, "Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media", IEEE Trans. On Antennas and Propagation, Vol.14, sf. 302-307, May 1966.
- [3] A.Taflove, M.E.Brodwin, "Numerical Solution of Steady-State Electromagnetic Scattering Problems Using the Time Dependent Maxwell's Equations" IEEE, Trans. On MTT, Vol.23, 1975.
- [4] A. Taflove, "Computational Electrodynamics : The Finite-Difference Time-Domain Metod", Artech House, Boston, MA, 1995.
- [5] J.S. Shang, "Characteristic Based Algorithm for Solving the Maxwell Equations in the Time-Domain", IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol.37, sf. 15-25, 1995.
- [6] J. H. Beggs, "A Linear Bicharacteristic FDTD Method", Antennas and Propagation Society, 2001 IEEE International Symposium, Vol.II, sf. 64-67.
- [7] J. H. Beggs, W. R. Briley, "An Implicit Characteristic Based Method for Electromagnetics", NASA/TM-2001-210862, May 2001.
- [8] R. Courant, D. Hilbert, "Methods of Mathematical Physics, Vol.II, Partial Differential Equations", Interscience Publisher, NY, 1965.
- [9] M. Kline, I. W. Kay, "Electromagnetic Theory and Geometrical Optics" Interscience Publisher, NY, 1965.