

Ayrık Kesirli Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü *

Erol Önen ve Aydın Akan
İstanbul Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
34850, Avcılar, İstanbul
{eeerol, akan}@istanbul.edu.tr

Özetçe

Bu çalışmada, ayrık zamanlı sinyallerin zaman frekans (ZF) analizi için bir Kesirli Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü önerilmektedir. Bu dönüşümün kernel işlevi, Ayrık Kesirli Fourier Dönüşümü yardımı ile elde edilmektedir. Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü (KZFD) zamanda kayan bir pencere yardımıyla bölütlenen sinyalin, klasik Fourier dönüşümü alınarak elde edilmektedir. Bu çalışmada ise sürekli zamanlı ve daha sonra ayrık zamanlı sinyaller için tanımlanan Kesirli Fourier Dönüşümünün (KFD) kısa zamanlı olarak ZF analizine uygulanması ve kesirli spektrogram üzerinde durulmaktadır.

1 Giriş

Zaman-Frekans (ZF) analizi sinyal enerjisinin birleşik ZF düzlemine dağılımını karakterize etmekte veya zamanla değişen güç spektrumu kestirmekte kullanılan bir yöntemdir [1]. ZF analizinde temel hedef, sinyal enerjisinin birleşik ZF düzlemine dağılımının dürtü işlevi çözünürlüğü ile elde etmektir, ancak bu genel olarak mümkün değildir [2]. Bu amaçla çok sayıda ZF analiz yöntemi verilmiştir: bunlardan bazıları kısa zamanlı Fourier dönüşümü, Cohen sınıfı ZF dağılımları (ZFD), Cohen-Posch sınıfı pozitif ZFD, Gabor ZF açılımları, dalgacık dönüşümleri, evrimsel izge analizi olarak sayılabilir [1].

Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü (KZFD) zamanda kayan bir pencere yardımıyla bölütlenen sinyalin, klasik Fourier dönüşümü alınarak elde edilmektedir. İncelenen sinyalin, pencere ile bölütlenen kısmının durağan kaldığı varsayılarak spektrum kestirimi yapılabilmektedir. Ayrık zamanlı bir $x(n)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ sinyalinin KZFD şu şekilde verilmektedir [1]:

$$X(n, \omega_k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) w(n-m) e^{-j\omega_k m} = \sum_{m=0}^{N-1} x_n(m) e^{-j\omega_k m} \quad (1)$$

Burada $x_n(m)$ pencerelenmiş yani kısa zamanlı işareti göstermekte olup $\omega_k = 2\pi k/N$ ve $w(n)$ sinyali yerel olarak incelemek amacıyla kullanılan penceredir. $x(n)$ işaretinin spektrogramı ise

$$S_{KZFD}(n, \omega_k) = \frac{1}{N} |X(n, \omega_k)|^2 \quad (2)$$

olarak hesaplanır.

KZFD'nün kullandığı, sabit bir analiz penceresinin zamanda düzgün ötelenmesi ve sinüsoidal Fourier kernelinin bir sonucu olarak, dikdörtgen örnekleme kafesi elde edilmiş olur. Pratikte karşılaştığımız birçok sinyal (ses, müzik, biyolojik, sismik, makina titreşimleri vs.) zamanla değişen frekans özellikleri gösterir ve böyle sabit band genişliği ile analiz edilmeye uygun değildir. Analiz edilmekte olan sinyalin zamanda bölütlenmesi sonucunda, sinyalin spektrum özellikleri pencerenin özellikleri ile harmanlanmış olacaktır. Zamanda yüksek bir analiz çözünürlüğü için dar bir pencere (ki frekansta yayılma sonucunu doğurur), aynı zamanda frekansta yüksek bir çözünürlük için geniş bir pencere (ki bu da zamanda yayılma demektir) kullanılmalıdır. Görüldüğü gibi genel olarak bu çözümsüz bir problemdir; KZFD'nün aynı anda hem zaman, hem de frekans çözünürlüğü yüksek yapılamaz [1].

*Bu çalışma İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğince desteklenmiştir. Proje No. :1575/16012001

Önceki çalışmalarda KZFD'nün ZF yerleşmesini arttırmak amacıyla pencere çarpı ile modüle edilmekte, veya sinyalin zamanla değişen frekans karakteristiğine uyumlu yapılmaktadır [3, 4]. Bu yöntemlerin bir çoğunda sinyali en iyi temsil eden analiz parametrelerini bulabilmek için çok sayıda deneme yapılarak bunlar arasından seçim yapılmaktadır. Dolayısı ile çok uzun ve zaman alıcı hesaplamalar gerekmektedir.

Son yıllarda kesirli Fourier dönüşümü (KFD) [5], kesirli Fourier serisi [6], KFD'nin sayısal olarak hesaplanması ve uygulamaları ve ayrık zamanlı KFD [7, 8] tanımı üzerinde yoğun çalışmalar yapılmaktadır.

Bu çalışmada ise, ayrık zamanlı sinyallerin zamanla değişen frekans bileşenlerinin yüksek çözünürlük ile temsil edilebilmesi için dikkörtgen olmayan bir örnekleme kafesi üzerinde, kesirli bir KZFD verilmektedir.

2 Kesirli Fourier Dönüşümleri

Klasik Fourier dönüşümünün genelleştirilmiş bir durumu olan Kesirli Fourier Dönüşümü (KFD), bir sinyali zaman domeni ile frekans domeni arasında bir u domeninde temsil eder. u domeni t - ω düzleminin α açısı kadar dönmesi ile elde edilebilmektedir. Öyle ki bu açı $\alpha = \pi/2$ olması durumunda u , frekans domeni ile ve $\alpha = 0$ olması durumunda da zaman domeni ile çakışmaktadır.

2.1 Sürekli Zamanlı Kesirli Fourier Dönüşümü

Kesirli Fourier Dönüşümü (KFD), klasik Fourier dönüşümünün genelleştirilmiş hali olup şu şekilde tanımlanabilir [5]:

$$X_\alpha(u) = \sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{2\pi}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot u^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j \csc \alpha \cdot u \cdot t} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot t^2} x(t) dt \quad (3)$$

olarak verilir. Yukarıdaki eşitlikte $\sqrt{1-j \cot \alpha}$ faz terimi $(-\pi/4 - pi/4)$ aralığında sınırlıdır. (3) eşitliği $\alpha = \pi/2$ için klasik Fourier dönüşümüne indirgenmektedir. KFD çeşitli sinyal işleme problemlerine uygulanmış ve ayrık zamanlı KFD üzerinde çeşitli çalışmalar [7, 8] yapılmıştır.

2.2 Ayrık Zamanlı Kesirli Fourier Dönüşümü

Sürekli zamanlı kesirli Fourier dönüşümü tanımlandıktan sonra birçok araştırmacı KFD'nin ayrık zamanlı halini elde etmeye çalışmışlar, çeşitli yöntemler önermişlerdir. Ayrık zamanlı kesirli Fourier dönüşümü (AKFD) için çok farklı tanımlar verilmesinin sebebi önerilen yöntemlerin, KFD'nin sahip olduğu üniterlik, tersinirlik, açısız toplanabilirlik, ve dönüşüm çekirdeğinin dik olması gibi önemli özelliklerden bir kısmının tam olarak sağlayamamasıdır [8]. S.C. Pei ve J.J. Ding tarafından [8]'de AKFD için "kapalı form" bir tanım önerilmiş ve bu şekilde verilen dönüşümün dik bir dönüşüm çekirdeğine sahip olduğu, üniterlik ve tersinirlik özelliklerini taşıdığı gösterilmiştir. Önerilen yöntem, sürekli zamanlı kesirli Fourier dönüşüm çekirdeğinin ve dönüşümü alınacak işaretin birbirine bağımlı şekilde örnekleme dayanmaktadır. $-N \leq n \leq N$ ve $-M \leq m \leq M$ olmak üzere, $x(t)$ giriş işareti ve $X_\alpha(u)$ dönüşüm işlevi, sırası ile Δt ve Δu örnekleme adımları ile $y(n) = x(n\Delta t)$ ve $Y_\alpha(m) = X_\alpha(m\Delta u)$ şeklinde örnekleterek, (3)'deki KFD eşitliği

$$Y_\alpha(m) = \sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{2\pi}} \Delta t e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \Delta u^2} \sum_{n=-N}^N e^{-j \csc \alpha \cdot nm \Delta t \Delta u} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot n^2 \Delta t^2} y(n) \quad (4)$$

Yukarıdaki eşitlik, dönüşüm matrisi $F_\alpha(m, n)$

$$F_\alpha(m, n) = \sqrt{\frac{1-j \cot \alpha}{2\pi}} \Delta t e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \Delta u^2} e^{-j \csc \alpha \cdot nm \Delta t \Delta u} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot n^2 \Delta t^2} \quad (5)$$

olmak üzere, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Y_\alpha(m) = \sum_{n=-N}^N F_\alpha(m, n) y(n) \quad (6)$$

Benzer şekilde AKFD kullanılarak zaman işareti

$$y(n) = \sum_{m=-M}^M F_\alpha^*(m, n) Y_\alpha(m), \quad M \geq N \quad (7)$$

Yukarıdaki eşitlikte $y(n)$ 'in elde geri edilebilmesi koşulundan örnekleme parametreleri arasında $|S|$, $2M + 1$ 'e göre asal bir tamsayı olmak üzere

$$\Delta u \Delta t = \frac{S2\pi \sin \alpha}{2M + 1} \quad (8)$$

ilişkisi elde edilir [8]. Bu koşulu (5) eşitliğinde kullanarak ve $S = \text{sgn}(\sin \alpha) = \pm 1$ olarak seçilerek, $\sin \alpha < 0$ ve $\sin \alpha > 0$ durumları için iki farklı AKFD bağıntısı elde edilmiş olur:

$$Y_\alpha(m) = \sqrt{\frac{\sin \alpha - j \cos \alpha}{2M + 1}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \Delta u^2} \sum_{n=-N}^N e^{-j \frac{2\pi n m}{2M+1}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot n^2 \Delta t^2} y(n), \quad \sin \alpha > 0 \quad (9)$$

ve

$$Y_\alpha(m) = \sqrt{\frac{-\sin \alpha + j \cos \alpha}{2M + 1}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \Delta u^2} \sum_{n=-N}^N e^{j \frac{2\pi n m}{2M+1}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot n^2 \Delta t^2} y(n), \quad \sin \alpha < 0 \quad (10)$$

Burada, $\Delta u \Delta t = S2\pi \sin \alpha / (2M + 1)$ ve $M \geq N$ koşulları sağlanmalıdır. Ayrıca $\alpha = k\pi$, k tamsayı olması halinde uygun örnekleme parametreleri bulunması mümkün değildir. Bu durumda KFD tanımından

$$Y_\alpha(m) = \begin{cases} y(m), & \alpha = 2k\pi; \\ y(-m), & \alpha = (2k + 1)\pi. \end{cases} \quad (11)$$

Böylece AKFD'nin tam tanımı (9), (10) ve (11) eşitlikleri ile verilmiş olur. Bu çalışmada KZFD'de kullanılan klasik DFT yerine AKFD kullanarak ayrık, kesirli kısa zamanlı bir zaman-frekans yöntemi önerilmektedir.

3 Ayrık Kesirli Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü

Frekans içeriği özellikle doğrusal biçimde değişen işaretler (çırplar) birçok pratik uygulamada karşımıza çıkmaktadır. Bu işaretlerin zaman frekans analizinde uygun bir yaklaşım kesirli Fourier analizi olacaktır. Dolayısı ile bu çalışmada kolay gerçekleştirilebilir bir ZF yöntemi olan KZFD'nün ayrık zamanlı işaretler için kesirli hali ortaya konmaktadır. Bu anlamda ayrık zamanlı bir $y(n)$ işaretinin ya da sürekli zamanlı $x(t)$ işareti Δt örnekleme periyodu ile örneklenecek elde edilmiş $x(n\Delta t)$ işareti için Kesirli Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü (KKZFD) şu şekilde tanımlanabilir:

$$Y_\alpha(n, m) = \sqrt{\frac{\sin \alpha - j \cos \alpha}{2M + 1}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \Delta u^2} \sum_{k=-N}^N e^{-j \frac{2\pi k m}{2M+1}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot k^2 \Delta t^2} y(k)w(n - k), \quad \sin \alpha > 0 \quad (12)$$

ve

$$Y_\alpha(n, m) = \sqrt{\frac{-\sin \alpha + j \cos \alpha}{2M + 1}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot m^2 \Delta u^2} \sum_{k=-N}^N e^{j \frac{2\pi k m}{2M+1}} e^{\frac{j}{2} \cot \alpha \cdot k^2 \Delta t^2} y(k)w(n - k), \quad \sin \alpha < 0 \quad (13)$$

Burada $y(k)w(n - k)$ pencerelenmiş işareti göstermekte olup, $\alpha = \pi/2$ olması durumunda yukarıdaki KKZFD, klasik KZFD'ye dönüşmektedir. Sonuç olarak kesirli spektrogram ise KKZFD'nin genlik karesi olarak tanımlanabilir: $S_\alpha(n, m) = |Y_\alpha(n, m)|^2$.

4 Örnekler

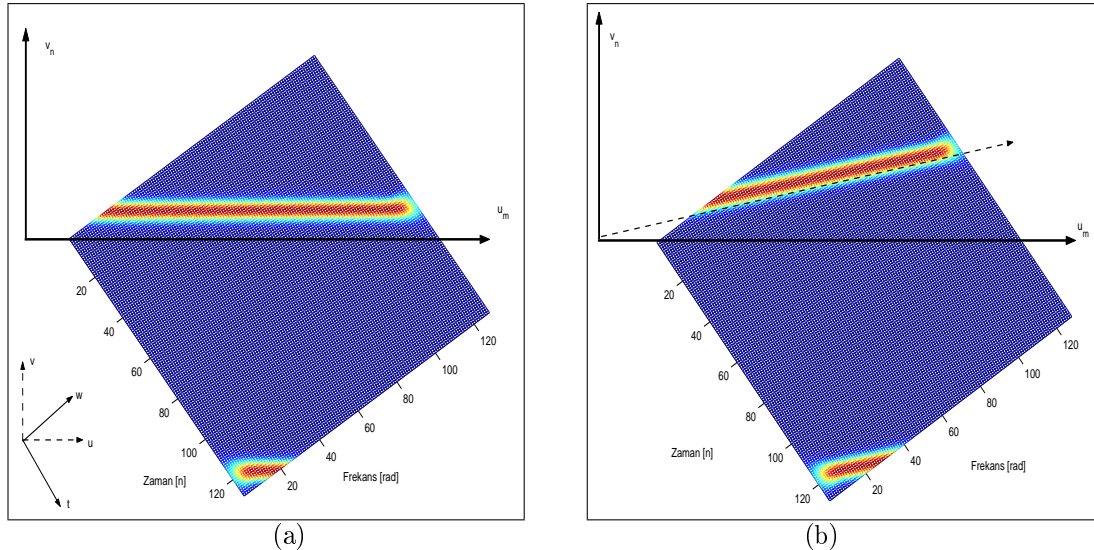
Frekansı $0 - \pi$ arasında değişen (zaman eksenini $\pi/4$ rad. açı yapan) bir doğrusal çırp işareti $\alpha = \pi/4$ kesir derecesi, $N = 128$, $M = 128$ ve $\Delta t = 0.1$ ile analiz edilmiş ve $S_\alpha(n, m)$ Şekil 1-(a)'da verilmiştir. Dikkat edilecek olursa doğrusal çırp $\alpha = \pi/4$ için, u_m ekseninde bulunmaktadır. Diğer bir örnek olarak frekansı $0 - \pi/2$ arasında değişen bir çırp yine $\alpha = \pi/4$, $N = 128$, $M = 128$ ve $\Delta t = 0.1$ ile analiz edilmiş ve $S_\alpha(n, m)$ Şekil 1-(b)'de gösterilmiştir. Bu durumda işaretin spektrogramının kesirli düzlemde dönmüş bir çırp olarak görüldüğü ortaya çıkmaktadır.

5 Sonuç ve Yorumlar

Bu çalışmada, ayrık zamanlı sinyaller için bir kesirli kısa zamanlı Fourier dönüşümü verilmektedir. Bu dönüşüm özellikle frekans içeriği doğrusal olarak değişen işaretlerin zaman-frekans analizinde ve yüksek çözünürlüklü güç izgesi elde etmek amacıyla kullanılabilir. Benzetim sonuçları dönüşümün ZF düzleminde zaman ve frekans eksenlerinin dönmesi ile yeni bir eksen takımı tanımlandığını göstermektedir.

Kaynakça

- [1] Cohen, L., *Time-Frequency Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [2] Baraniuk, R.G., ve Jones, D.L., "Shear Madness: New Orthonormal Bases and Frames Using Chirp Functions," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Cilt. 41, No. 12, ps. 3543–3549, Aralık 1993.
- [3] Akan, A., ve Chaparro, L.F., "Evolutionary Chirp Representation of Non-stationary Signals via Gabor Transform," *Signal Processing*, Cilt. 81, No. 11, sf. 2429-2436, Kasım 2001.
- [4] Bultan A., "A Four-Parameter Atomic Decomposition of Chirplets," *IEEE Tans. on Signal Proc.*, Cilt. 47 sf. 731–745, 1999.
- [5] Almeida, L.B., "The Fractional Fourier Transform and Time-Frequency Representations," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Cilt. 42, No. 11, sf. 3084–3091, Kasım 1994.
- [6] Pei, S.C., Yeh, M.H., ve Luo, T.L., "Fractional Fourier Series Expansion for Finite Signals and Dual Extension to Discrete-Time Fractional Fourier Transform," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Cilt. 47, No. 10, sf. 2883–2888, Ekim 1999.
- [7] Candan Ç., Kutay, M.A., ve Özaktaş H.M., "The Discrete Fractional Fourier Transform," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Cilt. 48, no. 5 sf. 1329–1337, Mayıs 2000.
- [8] Pei, S.C., ve Ding, J.J., "Closed-Form Discrete Fractional and Affine Fourier Transform," *IEEE Trans. on Signal Proc.*, Cilt. 48, no. 5, sf. 1338–1353, Mayıs 2000.



Şekil 1: a) $\pi/4$ rad. açılı, b) $3\pi/8$ rad. açılı çirp işaretinin kesirli spektrogramı.