

En Küçük Kareler Yöntemi ile Zaman-Frekans Analizi

Mahmut Yalçın¹ ve Aydın Akan
İstanbul Üniversitesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
Avcılar, 34850, İstanbul
myalcin@istanbul.edu.tr, akan@istanbul.edu.tr

Özet: Bu çalışmada, durağan olmayan işaretlerin zaman-frekans izgelerinin bulunması için, çok pencereci bir yöntem sunulmaktadır. Yöntem, çok pencereci Gabor açılımı kullanılarak hesaplanan evrimsel izgelerin optimal birleşimi üzerine dayanmaktadır. Optimal ağırlık katsayıları, en küçük kareler yöntemi kullanılarak, referans olarak alınan zaman-frekans dağılımı ile evrimsel izgelerin birleşimi arasındaki farkın en küçük yapılması sonucu bulunmaktadır. Önerilen yöntemin etkinliği örneklerle gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Zaman-frekans analizi, Evrimsel izge, Çok pencereci zaman-frekans analizi.

1. Giriş

Durağan olmayan işaretlerin zamanla değişen frekans içeriği, zaman-frekans analizi için yardımcı bir araçtır [1]. Durağan olmayan rasgele süreçlerin zaman bağımlı izgesel analizi için Wigner-Ville İzgesi (WVİ) [2]

$$S(t, \omega) = E\{W(t, \omega)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \left[x\left(t - \frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t + \frac{\tau}{2}\right)\right] e^{-j\omega\tau} d\tau\right\} \quad (1)$$

şeklinde verilmektedir, burada $W(t, \omega)$, Wigner dağılımını gösterir ve yukarıdaki sürecin gerçekleştirilmesi, Wigner Dağılımının istatistiksel ortalamasıdır. Sürecin yalnız bir tek gerçekleşmesi verilirse, WVİ'ni kestirmek için yumuşatılmış çekirdek fonksiyonları ile zaman-frekans dağılımı kullanılır [1]. Yansız ve düşük değışintili WVİ kestirim özelliklerine sahip çekirdek dizayn etmek için bir çok araştırma yapılmıştır [2,3].

En küçük kareler anlamında sürecin çok pencereci spektrogramlarının optimal ortalaması kullanılarak WVİ kestirimi için yeni bir kestirim sunulmaktadır [4,5]. Bu çalışmada, ayrık evrimsel dönüşüm ile çok pencereci evrimsel izgenin ağırlıklı ortalamaları birleşimi için WVİ kestirimi genişletilmektedir [6]. Birleştirilmiş ağırlıklar, ortalama evrimsel izge ve yüksek dereceli zaman-frekans gösterimi arasındaki toplam karesel farkın en küçük yapılması ile elde edilir.

2. Ayrık Evrimsel Dönüşüm

Durağan olmayan $x(n)$; $n=0, 1, 2, \dots, N-1$, şeklinde verilen işaretin, ayrık Wold-Cramer gösterimi [7]

$$x(n) = \sum_{k=0}^{K-1} X(n, \omega_k) e^{j\omega_k n} \quad (2)$$

ile verilmektedir, burada $\omega_k = 2\pi k / K$, K frekans örneklerinin sayısı ve $X(n, \omega_k)$ evrimsel çekirdektir.

Evrimsel izge, bu çekirdekten $S(n, \omega_k) = |X(n, \omega_k)|^2$ şeklinde elde edilir. Sinüzoidal ayrık evrimsel dönüşüm, çekirdeği işaret cinsinden ifade ederek elde edilir. Böylece, (2) eşitliğindeki ayrık evrimsel dönüşümün sinüzoidal gösterimi, $X(n, \omega_k)$, $0 \leq k \leq K-1$, evrimsel çekirdeği için [6]

$$X(n, \omega_k) = \sum_{\ell=0}^{N-1} x(\ell) W_k(n, \ell) e^{-j\omega_k \ell} \quad (3)$$

eşitliğini sağlar, burada $W_k(n, \ell)$, genelde zamana ve frekansa bağımlı bir penceredir. $W_k(n, \ell)$ pencereleri, dik olmayan tabanları kullanan Gabor gösterimi ile elde edilebilir. Örneğin; çok pencereci Gabor açılımı [8],

¹ Bu çalışma, İstanbul Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yürütücü Sekreterliğince desteklenmiştir. Proje No. : B-1080/27062001.

$$x(n) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} a_{i,m,k} h_i(n-mL) e^{j\omega_k n} = \sum_{k=0}^{K-1} X_i(n, \omega_k) e^{j\omega_k n} \quad (4)$$

şeklinde verilsin, burada $\{a_{i,m,k}\}$ çok çözünürlüklü Gabor katsayıları, $\{h_{i,m,k}\}$ Gabor taban fonksiyonlarıdır. Taban fonksiyonları bir pencerenin farklı ölçeklerle ölçeklenmesi ve zamanda ve sıklıkta eşit aralıklarla ötelenmesiyle elde edilmektedir:

$$h_{i,m,k}(n) = h_i(n-mL) e^{j\omega_k n}. \quad (5)$$

$h_i(n)$ sentez penceresi, birim enerjiye sahip bir $g(n)$ ana Gabor penceresinden

$$h_i(n) = 2^{i/2} g(2^i n), \quad i = 0, 1, \dots, I-1 \quad (6)$$

zaman ölçeklemesi ile elde edilir. Burada, I kullanılan pencere yani çözünürlük sayısını, 2^i ise ölçeği göstermektedir. Çok pencereli Gabor katsayıları

$$a_{i,m,k} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \gamma_i^*(n-mL) e^{-j\omega_k n} \quad (7)$$

eşitliği ile elde edilir, burada analiz penceresi $\gamma_i(n)$, sentez penceresi $h_i(n)$ 'e dik olacak şekilde, aşağıdaki ikili-diklik koşulunun çözümü ile bulunur [8]. Böylece eşitlik (4), işaretlerin gösterimlerini karşılaştırarak evrimsel çekirdeği

$$X_i(n, \omega_k) = \sum_{m=0}^{M-1} a_{i,m,k} h_i(n-mL) \quad (8)$$

şeklinde elde ederiz, $\{a_{i,m,k}\}$ katsayıları (8) eşitliğinde yerine yazılarak

$$X_i(n, \omega_k) = \sum_{\ell=0}^{N-1} x(\ell) W_i(n, \ell) e^{-j\omega_k \ell} \quad (9)$$

elde edilebilir ki burada $W_i(n, \ell)$ Gabor sentez ve analiz pencerelerine bağlı, zamanla değişen yeni bir penceredir:

$$W_i(n, \ell) = \sum_{m=0}^{M-1} \gamma_i^*(\ell-mL) h_i(n-mL). \quad (10)$$

$x(n)$ işaretinin evrimsel izgesi $h_i(n)$ penceresi kullanılarak

$$S_i(n, \omega_k) = \frac{1}{K} |X_i(n, \omega_k)|^2, \quad (11)$$

şeklinde elde edilir, burada $1/K$ faktörü, düzgün enerji normalizasyonu için kullanılır. $W_i(n, \ell)$ penceresi birim enerjiye normalize edildiğinde, işaretin toplam enerjisinin korunduğu [8]'de gösterilmiştir. Üstelik, $S_i(n, \omega_k)$ negatif olmayan değerler almakta ve zaman sıklık marjinalerini [1] yaklaşıklıkla sağlamaktadır. Bu sebeple bir çok zaman-sıklık dağılımının aksine $S_i(n, \omega_k)$, zaman-sıklık enerji yoğunluk fonksiyonu olarak

yorumlanabilir [1]. Dolayısıyla durağan olmayan işaretlerin bir özneliği olan birleşik zaman-sıklık momentlerinin hesaplanmasında enerji yoğunluk fonksiyonu olarak kullanılabilir [8].

3. Çok Pencereleli Evrimsel İzge

Toplamsal gürültü ile bozulmuş ayrık zamanlı durağan olmayan sürecin gerçekleştirilmesinde $x(n) = s(n) + \eta(n)$; $s(n)$ ve $\eta(n)$ sırasıyla işaret ve gürültü işlevlerini göstermektedir. En küçük kareler anlamında referans zaman-frekans dağılımına yakın olan evrimsel izgenin ağırlıklandırılmış ortalama birleşimini hesaplarız. Verilen $x(n)$ işaretinin $i=0, 1, \dots, I-1$ için evrimsel izgeleri hesaplanır:

$$S_i(n, \omega_k) = \frac{1}{K} \left| \sum_{\ell=0}^{N-1} x(\ell) W_i(n, \ell) e^{-j\omega_k \ell} \right|^2. \quad (12)$$

Zaman-frekans düzleminde, pencerelerin optimal yoğunlaşması için $h_i(n)$, Gauss pencereleri olarak kullanılır [9]. Böylece, evrimsel izgelerin ağırlıklı ortalaması olarak $x(n)$ sürecinin WVİ'ni şu şekilde kestirebiliriz:

$$\hat{P}(n, \omega_k) = \sum_{i=0}^{I-1} c_i S_i(n, \omega_k) \quad (13)$$

burada $\{c_i\}$ ağırlık katsayıları, hata fonksiyonunu en küçük yapacak şekilde hesaplanacaktır:

$$\mathcal{E}_i = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{K-1} \left| P_R(n, \omega_k) - \sum_{i=0}^{I-1} c_i S_i(n, \omega_k) \right|^2. \quad (14)$$

Referans olarak alınan zaman-frekans dağılımı, $P_R(n, \omega_k)$, işaretin yüksek dereceli zaman-frekans gösterimidir [10]. Matris gösterimi kullanarak en küçük yapma problemi (14)'ten tekrar şu şekilde yazılabilir:

$$\min_{c_i} \|\mathbf{P}_R - \mathbf{S}\mathbf{c}\|^2 \quad (15)$$

Bu en küçük kareler, en küçültme sorunu $\mathbf{c}^o = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{P}_R$ olarak çözülür, burada o üst simgesi en iyiyi temsil etmektedir. WVİ kestirimi ile elde edilen en uygun ağırlık katsayıları, $\{c_i^o\}$, şu şekilde bulunur:

$$\hat{P}_{ES}(n, \omega_k) = \sum_{i=0}^{I-1} c_i^o S_i(n, \omega_k). \quad (16)$$

Sonuçta, önerdiğimiz Wigner-Ville İzge kestirimi $\hat{P}_{ES}(n, \omega_k)$ 'te, negatif c_i^o katsayılarının sebep olduğu muhtemel negatif terimleri maskeleyerek veya belli bir eşik referansla karşılaştırarak negatif olmayan zamanla değişen izge elde edilmektedir:

$$\hat{P}_{ES}(n, \omega_k)^+ = \begin{cases} \hat{P}(n, \omega_k), & \hat{P}(n, \omega_k) \geq 0; \\ 0, & \hat{P}(n, \omega_k) < 0. \end{cases} \quad (17)$$

burada $\hat{P}_{ES}(n, \omega_k)^+$ evrimsel izgenin yalnız pozitif kısımlarını gösterir.

4. Örnekler

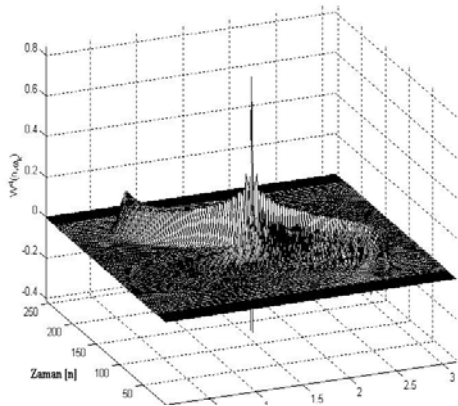
Önerdiğimiz yöntemin performansını göstermek için, sinüzoidal FM işareti ele alınmaktadır. Şekil 1’de 4. derece Moment Wigner-Ville İzgesi verilmektedir. Buradaki yüksek dereceli zaman-frekans dağılımının avantajı yüksek çözünürlüğe sahip olması, sorunları ise negatif değerler alması ve girişim terimleri içermesidir. Önerilen yöntemde, referans olarak bu yüksek dereceli zaman-frekans dağılımı kullanılmakta ve Şekil 2’de görülen en küçük kareler evrimsel izgesi, $\hat{P}_{ES}(n, \omega_k)^+$ kestirilmektedir. Görüldüğü gibi, elde edilen sonuç, her zaman pozitif değerler almakta ve referans zaman-frekans dağılımı ile çok pencereli evrimsel izge kestirimlerinin avantajlarını taşımaktadır.

5. Sonuçlar

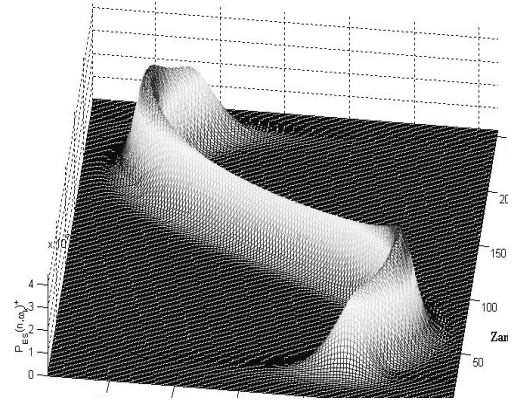
Bu çalışmada, durağan olmayan işaretlerin evrimsel izgesini kestirmek için, en küçük kareler yaklaşımını kullanan yeni bir yöntem önerildi. Önerilen yöntem, ayrık evrimsel dönüşümünü kullanarak hesaplanan evrimsel izgelerin optimal birleşimine dayanmaktadır. Burada optimal ağırlıklar, evrimsel izgelerin birleşimi ile referans olarak alınan bir zaman-frekans dağılımı arasındaki (burada yüksek dereceli bir zaman-frekans dağılımı alınmaktadır) hatanın kareleri toplamının en küçük yapılması ile bulunmaktadır. Örnekler, yeni yöntemin çok pencereli evrimsel izge analizinin negatif olmama gibi, yüksek dereceli zaman-frekans dağılımının da yüksek çözünürlük gibi avantajlarını birleştirdiğini göstermektedir.

Kaynaklar

- [1]. Cohen L., Time-Frequency Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1995.
- [2]. Martin W. ve Flandrin P., Wigner-Ville spectral analysis of non-stationary signals, IEEE Trans. Acoust. Speech and Proc., Cilt 33, No. 6, sf. 1461-1470, Aralık 1985.
- [3]. Baranuk R. G. ve Jones, D. L., (October 1995): An adaptive optimal kernel time-frequency representation, IEEE Trans. on Signal Proc., Cilt 43, No. 10, sf. 2361-2371, Kasım 1995.
- [4]. Bayram M., Baranuk R. G., Multiple window time-frequency analysis, IEEE Int. Symp. Time-Frequency and Time-Scale Analysis, Paris, France, sf. 511-514, Haziran 1996.
- [5]. Çakrak F., Loughlin P., Multi-window Time Varying Spectrum with Instantaneous Bandwidth and Frequency Constraints, IEEE Trans. on Signal Proc., Cilt. 49, sf. 1656-1666, Ağustos 2001.
- [6]. Suleesathira R., Akan A. ve Chaparro L. F., Discrete Evolutionary Transform for Time-Frequency Signal Analysis, J. Franklin Institute, Special Issue on Time-Frequency Signal Analysis and its Applications, Cilt 337, No. 4, sf. 347-364, Temmuz 2000.
- [7]. Priestley M. B., Non-linear and Non-stationary Time Series Analysis. Academic Press, London, 1988.
- [8]. Akan A., ve Chaparro L.F., Multi-Window Gabor Expansion for Evolutionary Spectral Analysis, Signal Processing, Cilt 63, sf. 249-262, Aralık 1997.
- [9]. Balian R., Un principe d’incertitude fort en theorie du signal on en mecanique quantique, Comptes Rendus de l’Academie des Sciences, Paris, Cilt 292, No 2, sf. 1357-1362, Haziran 1981.
- [10]. Boashash B., Ristic B., Polynomial time-frequency distributions and time-varying higher order spectra: Application to the analysis of multicomponent FM signals and to the treatment of multiplicative noise, Elsevier Science Signal Processing 67, sf.1-23, 1998.



Şekil 1: Sinüzoidal FM İşaretinin Moment Wigner-Ville Üçüz İzgesi.



Şekil 2: Sinüzoidal FM İşaretinin En Küçük Kareler Evrimsel İzge Kestirimi.