

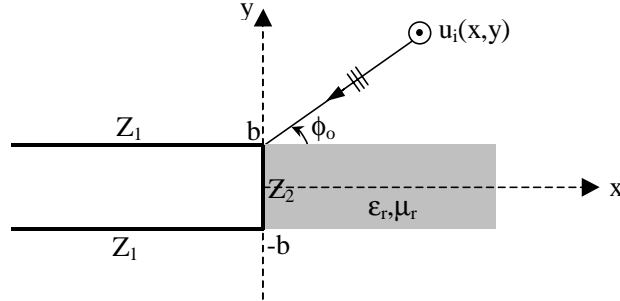
Düzlemsel Dalgaların Kalınlıklı bir Empedans Yarım Düzlemi ile Yarısonsuz bir Dielektrik Tabaka Ekleminde Kırınımı

İsmail Hakkı Tayyar, Alinur Büyükaksoy

Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü
P.K: 141, 41400, Gebze, Kocaeli
tel:262-6538497, fax:262-6538490
e-mail: tayyar@gyte.edu.tr, alinur@gyte.edu.tr

Özet

Bilindiği gibi kalınlığı ihmal edilemeyen yarım ve iki parçalı düzlem problemleri bugüne kadar birçok araştırmaya konu olmuş kanonik problemlerdir. Mükemmel iletken kalınlıklı yarım düzlemde kırınım ilk defa Jones tarafından Wiener-Hopf tekniğinin modifiye bir şekli kullanılarak çözülmüştür [1]. Kalınlıklı yarım düzlem eklem problemleri kapsamında Aoki ve Uchida [2] iki kalınlıklı dielektrik yarım düzlemde kırınımı, Volakis ve Ricoy da kalınlıklı metal dielektrik eklem problemini incelemiştir [3]. Bu çalışmanın amacı [3] de ele alınan geometriyi mükemmel iletken yarım düzlemin bir empedans yarım düzlemi ile değiştirildiği genel halde yeniden ele almaktır. [3] de kullanılan yöntem saçılma matrisi formülasyonuna dayanmasına karşın bu çalışmada problem önce görüntü prensibi kullanılarak daha basit iki alt probleme indirgenmiş, bunlar da Fourier dönüşümü aracılığı ile ikinci türden modifiye Wiener-Hopf problemine indirgenerek çözülmüştür. Bulunan sonuçlar, dielektrik tabakanın sözkonusu olmadığı limit hale ilişkin Büyükaksoy ve Çınar [4] in sonuçları ile analitik olarak çakışmaktadır. Bu da yapılan analizin doğru olduğunu göstermektedir.

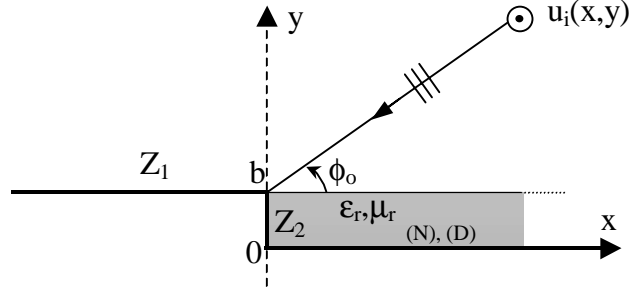


Şekil-1 Problemin geometrisi

Problemin Formülasyonu

E_z -polarize zamana harmonik bağlı bir düzlem dalga $2b$ kalınlıklı bir empedans yarım düzlemi ile yarısonsuz bir dielektrik tabaka eklemine aydınlatılır. Empedans yarım düzlemin yan yüzeyleri $\mathcal{S}_1 = \{(x, y, z); x \in (-\infty, 0), y = b, z \in (-\infty, \infty)\}$ ve $\mathcal{S}_2 = \{(x, y, z); x \in (-\infty, 0), y = -b, z \in (-\infty, \infty)\}$ $Z_1 = \eta_1 Z_0$ empedansı ile sonlandırma yüzeyi $\mathcal{S}_3 = \{(x, y, z); y \in (-b, b), x = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$ ise $Z_2 = \eta_2 Z_0$ empedansı ile ifade edilebildiğini kabul edelim. Burada Z_0 ile boşluktan ibaret olan dış ortamın karakteristik empedansı gösterilmektedir. Matematiksel uygunluk açısından η_1 'in saf sanal olduğu kabul edilmektedir, i.e., $\eta_1 = i\xi_1$, $\xi_1 \in \mathbb{R}$. Dielektrik tabakanın relatif bünye parametreleri ϵ_r, μ_r dir.

Görüntü prensibi kullanılarak problem çift ve tek uyarma olmak üzere daha basit iki alt probleme indirgenir (Şekil-2). Çift uyarda toplam elektrik alanın yüzeye dik yöndeki türevinin $y = 0$, $x \in (-\infty, \infty)$ düzleminde sıfır olması gerekir (Magnetik duvar). Tek uyarda ise toplam elektrik alanın $y = 0$, $x \in (-\infty, \infty)$ düzleminde sıfır olması gerekir (Elektrik duvar).



Şekil-2 Çift uyarma için magnetik duvar, tek uyarma için elektrik duvar

Yapılacak analiz bakımından toplam elektrik alanı, $u_T^{(e,o)}(x, y)$, aşağıdaki gibi ifade etmek uygun olacaktır. Burada üstsimge olan (e, o) sırasıyla çift uyarma ve tek uyarma için alan bileşenlerini ifade etmektedir.

$$u_T^{(e,o)}(x, y) = \begin{cases} u^i(x, y) + u^r(x, y) + u_1^{(e,o)}(x, y) & , y > b \\ u_2^{(e,o)}(x, y)\mathcal{H}(x) & , 0 < y < b \end{cases} \quad (1)$$

Burada $\mathcal{H}(x)$ birim basamak fonksiyonu, $u^i(x, y)$ gelen düzlem dalga, $u^r(x, y)$ ise $y = b$ düzleminden yansıyan dalgayı ifade etmektedir:

$$E_z^i = u^i(x, y) = \exp[-ik_0(x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0)] \quad (2)$$

$$u^r(x, y) = \frac{\xi_1 \sin \phi_0 - 1}{\xi_1 \sin \phi_0 + 1} \exp\{-ik_0[x \cos \phi_0 - (y - 2b) \sin \phi_0]\} \quad (3)$$

k_0 ve ϕ_0 sırasıyla boş uzayın dalga sayısı ve geliş açısını göstermektedir. Problemi çözerken göz önüne alacağımız Fourier integrallerinin yakınsaması için ortamın çok küçükte olsa bir iletkenliğe sahip olduğunu, yani k_0 'ın çok küçük bir sanal bileşeni olduğu varsayılacak ve analizin sonunda kayıpsız ortam için geçerli çözüm $\Im m(k_0) \rightarrow 0$ yapmak suretiyle elde edilecektir.

Problem u_1 ve u_2 nin belirlenmesi ve analizinden ibarettir. u_1 ve u_2 Helmholtz denklemi, aşağıdaki sınır koşulları, süreklilik bağıntıları ve radyasyon koşulunu sağlarlar:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0^2 \right] u_1^{(e,o)}(x, y) = 0 \quad , \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (4a)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_1^2 \right] u_2^{(e,o)}(x, y) = 0 \quad , \quad x \in (0, \infty) \quad (4b)$$

$$\left(1 + \frac{\xi_1}{k_0} \frac{\partial}{\partial y} \right) u_1^{(e,o)}(x, b) = 0 \quad , \quad x < 0 \quad ; \quad \left(1 + \frac{\eta_2}{ik_1} \frac{\partial}{\partial x} \right) u_2^{(e,o)}(0, y) = 0 \quad , \quad 0 < y < b \quad (5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_2^{(e)}(x, 0) = 0 \quad , \quad x > 0 \quad ; \quad u_2^{(o)}(x, 0) = 0 \quad , \quad x > 0 \quad (5b)$$

$$u^i(x, b) + u^r(x, b) + u_1^{(e,o)}(x, b) = u_2^{(e,o)}(x, b), \quad x > 0 \quad (5c)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[u^i(x, b) + u^r(x, b) + u_1^{(e,o)}(x, b) \right] = \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial}{\partial y} u_2^{(e,o)}(x, b), \quad x > 0 \quad (5d)$$

$$\sqrt{\rho} \left[\frac{\partial u}{\partial \rho} - ik u \right] \rightarrow 0 \quad , \quad \rho \rightarrow \infty \quad (5e)$$

ve $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ dir.

Bundan sonraki analiz sınır ve süreklilik koşullarının Fourier dönüştürme alınmış alan bileşenlerine uygulanması ve ikinci türden modifiye Wiener-Hopf probleminin çift ve tek uyarma için ayrı ayrı elde edilmesidir. Çift uyarma için

$$\begin{aligned} & \frac{i\xi_1}{\mu_r} \frac{\chi(i\xi_1, \alpha)}{M^{(e)}(\alpha)N^{(e)}(\alpha)} R_+^{(e)}(\alpha) + F_-^{(e)}(\alpha, b) \\ &= -\frac{\mathcal{R}}{(\alpha - k_0 \cos \phi_0)} + \frac{\xi_1}{\mu_r k_0} \left[1 + \alpha \frac{\eta_2}{k_1} \right] \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(e)} \frac{K_{1m}^{(e)} \sin K_{1m}^{(e)} b}{\left[(\alpha)^2 - (\alpha_m^{(e)})^2 \right]}. \end{aligned} \quad (6)$$

Burada $R_+^{(e)}(\alpha)$, $N^{(e)}(\alpha)$, $M^{(e)}(\alpha)$ $\chi(\eta, \alpha)$ ve \mathcal{R} :

$$R_+^{(e)}(\alpha) = \left[1 + \frac{i\xi_1}{k_0} K_0(\alpha) \right] A^{(e)}(\alpha) \quad (7a)$$

$$N^{(e)}(\alpha) = \frac{K_0(\alpha)}{\mu_r K_0(\alpha) \cos K_1 b - i K_1(\alpha) \sin K_1(\alpha) b} ; \quad M^{(e)}(\alpha) = \cos K_1(\alpha) b - \frac{\xi_1}{\mu_r k_0} K_1(\alpha) \sin K_1(\alpha) b \quad (7b)$$

$$\chi(\eta, \alpha) = \frac{K_0(\alpha)}{\eta K_0(\alpha) + k_0} \quad (7c)$$

ve

$$\mathcal{R} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\xi_1 \sin \phi_0 e^{-ik_0 b \sin \phi_0}}{(i\xi_1 \sin \phi_0 + 1)}. \quad (7e)$$

dir. (6) denkleminde (+) alt indisi ile üst-yarı düzlemde regüler (−) alt indisi ile alt-yarı düzlemde regüler fonksiyonlar, $f_m^{(e)}$ ile de $\frac{\partial u_2^{(e)}}{\partial x}(0, y)$, $y \in (0, b)$ fonksiyonun Fourier cosinüs serisindeki katsayıları ifade edilmiştir. (7a) denkleminde görülen $A^{(e)}(\alpha)$ ise (4a) denkleminin çift uyarma için genel çözümündeki bilinmeyen katsayıdır. Klasik Wiener-Hopf tekniğinin uygulanması sonucu (6) denkleminin çözümü. Çözüm aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} & \frac{i\xi_1}{\mu_r} \frac{\chi_+(i\xi_1, \alpha)}{M_+^{(e)}(\alpha)N_+^{(e)}(\alpha)} R_+^{(e)}(\alpha) \\ &= -\frac{\mathcal{R}}{(\alpha - k_0 \cos \phi_0)} \frac{M_-^{(e)}(k_0 \cos \phi_0) N_-^{(e)}(k_0 \cos \phi_0)}{\chi_-(i\xi_1, k_0 \cos \phi_0)} \\ & \quad - \frac{\xi_1}{\mu_r k_0} \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(e)} \left[1 - \alpha_m^{(e)} \frac{\eta_2}{k_1} \right] \frac{K_{1m}^{(e)} \sin[K_{1m}^{(e)} b]}{2\alpha_m^{(e)} (\alpha + \alpha_m^{(e)})} \frac{M_+^{(e)}(\alpha_m^{(e)}) N_+^{(e)}(\alpha_m^{(e)})}{\chi_+(i\xi_1, \alpha_m^{(e)})}. \end{aligned} \quad (8)$$

Tek uyarma için Wiener-Hopf denkleminin elde edilmesi ve çözümünü çift uyarma izlenen yola benzerdir. Sonuç olarak çözüm aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_1}{\mu_r} \frac{\chi(i\xi_1, \alpha)}{K_0(\alpha)M^{(o)}(\alpha)N^{(o)}(\alpha)} R_+^{(o)}(\alpha) - F_-^{(o)}(\alpha, b) \\ &= \frac{\mathcal{R}}{(\alpha - k_0 \cos \phi_0)} + \frac{\xi_1 K_1(\alpha)}{\mu_r k_0} \left[1 + \alpha \frac{\eta_2}{k_1} \right] \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(o)} \frac{K_{1m}^{(o)} \cos K_{1m}^{(o)} b}{\left[(\alpha)^2 - (\alpha_m^{(o)})^2 \right]} \end{aligned} \quad (9)$$

Burada $R_+^{(o)}(\alpha)$, $M^{(o)}(\alpha)$ ve $N^{(o)}(\alpha)$

$$R_+^{(o)}(\alpha) = \left[1 + \frac{i\xi_1}{k_0} K_0(\alpha) \right] A^{(o)}(\alpha) \quad (10a)$$

$$M^{(o)}(\alpha) = \left[\frac{\sin K_1}{K_1(\alpha)} b + \frac{\xi_1}{\mu_r k_0} \cos K_1 b \right] ; N^{(o)}(\alpha) = \frac{K_1(\alpha)}{K_1(\alpha) \cos K_1 b - i \mu_r K_0(\alpha) \sin K_1 b} \quad (10b)$$

dir. (9) denkleminde $f_m^{(o)}$ ile $\frac{\partial u_2^{(o)}}{\partial x}(0, y)$, $y \in (0, b)$ fonksiyonunun Fourier cosinüs serisindeki katsayıları ifade edilmiştir. (10a) denkleminde görülen $A^{(o)}(\alpha)$, (4a) denkleminin tek uyarma için genel çözümündeki bilinmeyen katsayıdır. (8) ve (9) denklemlerinde görülen $M_{\pm}^{(e,o)}(\alpha)$, $N_{\pm}^{(e,o)}(\alpha)$ ve $\chi_{\pm}(\eta, \alpha)$ fonksiyonları (7b-c) ve (10b) fonksiyonlarının Wiener-Hopf anlamında faktörizasyonlarıdır.

$$M^{(e,o)}(\alpha) = M_+^{(e,o)}(\alpha) M_-^{(e,o)}(\alpha) ; M_-^{(e,o)}(\alpha) = M_+^{(e,o)}(-\alpha) \quad (11a)$$

$$N^{(e,o)}(\alpha) = N_+^{(e,o)}(\alpha) N_-^{(e,o)}(\alpha) ; N_-^{(e,o)}(\alpha) = N_+^{(e,o)}(-\alpha) \quad (11b)$$

$$\chi(\eta, \alpha) = \chi_+(\eta, \alpha) \chi_-(\eta, \alpha) ; \chi_-(\eta, \alpha) = \chi_+(\eta, -\alpha) \quad (11c)$$

(8) ve (9) denklemlerinde gözüken $\alpha_m^{(e,o)}$ değerleri ise aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$M^{(e,o)}(\pm \alpha_m^{(e,o)}) = 0 , \Im m(\alpha_m^{(e,o)}) > \Im m(k_1) , m = 1, 2, \dots \quad (12)$$

(11a-c) denklemlerinde $M_+^{(e,o)}(\alpha)$, $N_+^{(e,o)}(\alpha)$, $\chi_+(\eta, \alpha)$ ve $M_-^{(e,o)}(\alpha)$, $N_-^{(e,o)}(\alpha)$, $\chi_-(\eta, \alpha)$ fonksiyonları kompleks α -düzleminin sırasıyla üst yarısında ve alt yarısında sıfırları olmayan ve regüler olan fonksiyonlardır.

Saçılan Alanın Analizi

Saçılan alan $u_1(x, y)$ çift ve tek uyarma durumlarına göre aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2} \begin{cases} \left[u_1^{(e)}(x, y) + u_1^{(o)}(x, y) \right], & y > b \\ \left[u_1^{(e)}(x, y) - u_1^{(o)}(x, y) \right], & y < -b \end{cases} , \quad (13)$$

ve

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{L}} \begin{cases} \left[R_+^{(e)}(\alpha) + R_+^{(o)}(\alpha) \right] e^{iK_0(\alpha)(y-b)} & y > b \\ \left[R_+^{(e)}(\alpha) - R_+^{(o)}(\alpha) \right] e^{-iK_0(\alpha)(y+b)} & y < -b \end{cases} \frac{e^{-i\alpha x}}{\left[1 + \frac{i\xi_1}{k_0} K_0(\alpha) \right]} d\alpha , \quad (14)$$

(14) denkleminde $\alpha = -k_0 \cos t$, $x = \rho_1 \cos \phi$ ve $y-b = \rho_1 \sin \phi$, $y > b$ ve $x = \rho_2 \cos \phi$, $y+b = \rho_2 \sin \phi$, $y < b$ dönüşümleri yapılırsa denklem semer noktası yöntemiyle asimptotik olarak hesaplanabilir. Semer noktası $y > b$ bölgesi için $t = \phi$, ve $y < b$ bölgesi için $t = 2\pi - \phi$ noktalarıdır ve alan ifadesi:

$$u_1(\rho, \phi) = \frac{e^{-i\pi/4}}{2} \frac{k_0 \sin \phi}{i\xi_1 \sin \phi + 1} \begin{cases} \left[R_+^{(e)}(-k_0 \cos \phi) + R_+^{(o)}(-k_0 \cos \phi) \frac{e^{ik_0 \rho_1}}{\sqrt{k_0 \rho_1}} \right], & \phi \in (0, \pi) \\ \left[R_+^{(e)}(-k_0 \cos \phi) - R_+^{(o)}(-k_0 \cos \phi) \frac{e^{ik_0 \rho_2}}{\sqrt{k_0 \rho_2}} \right], & \phi \in (\pi, 2\pi) \end{cases} . \quad (15)$$

olarak elde edilir.

Referanslar

- [1] D. S. Jones, "Diffraction by a thick semi-infinite plate", Proc. Roy. Soc., vol. A-217, pp.153-175, 1953.
- [2] K. Aoki and K. Uchida, "Scattering of a plane electromagnetic wave by two semi-infinite dielectric slabs" Trans. IECE, Japan, vol.62B, 1132-1139, 1979
- [3] J.L. Volakis and M.A. Ricoy, "H-polarization Diffraction by a Thick Metal-Dielectric Join," in Radar Cross Section of Complex Objects, IEEE Press: New York, 1990, pp. 481-491
- [4] G. Çınar and A. Büyükaksoy, "Diffraction by a thick impedance half-plane with different end face impedance", Electromagnetics, (in press)