

İLETKEN RASTGELE KESİTLİ BİR DALGA KLAVUZUNUN DALGA YAYILIM MODLARININ BELİRLENMESİ

Yasemin Altuncu, Selçuk Pakser
yaltuncu@ehb.itu.edu.tr, spaker@ehb.itu.edu.tr

İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Fakültesi
Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü
Maslak, İstanbul

Özet: Bu çalışmada, rastgele kesite sahip, mükemmel iletken bir dalga klavuzu içerisinde dalga yayılımını belirleyen TE ve TM tipi modların sayısal olarak belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu yapıların yaklaşık sayısal analizlerini gerçekleştirebilmek için Moment Yöntemi kullanılmıştır. Yüzey akımının dikdörtgen darbe fonksiyonları cinsinden seriye açılması ve nokta uyumluluk yönteminin kullanılması sonucu darbelerin merkezlerinde elde edilen denklemlerden TM ve TE için iki ayrı MOM matris formülasyonu oluşturulmuştur. Bu formülasyonda yer alan MOM empedans matrislerinin özdeğerleri, TM ve TE tipi modların kesim dalga sayılarına karşı düşmektedir. Mevcut formülasyon analitik çözümleri bilinen dalga klavuzlarına uygulanmış ve sonuçların analitik sonuçlarla uyumlu olduğu gözlenmiştir. Ayırıklaştırma sayısı ile bulunan modların yakınsaklığı incelenmiştir.

1. GİRİŞ

Mikrodalga sistemlerinde bazı özel fonksiyonel devrelerin bağlanmasında ve geçiş yapılarında, kesit yapısı daire ve kare gibi düzgün özelliğe sahip olmayan dalga klavuzları kullanılmasına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu çalışmada, rastgele kesite sahip olan mükemmel iletken bir dalga klavuzu içerisinde dalga yayılımını belirleyen TE ve TM tipi modların belirlenmesi amaçlanmıştır. Düzgün olmayan geometrik şekle sahip yapıların analizi için analitik ifadeler bulunmadığı için bu yapıların yaklaşık sayısal analizleri yapılabilmektedir. Bu çalışmada, frekans domeninde yapılacak analiz için Moment Yöntemi kullanılmıştır. Dalga klavuzunun özelliklerinin ekseni boyunca değişmediği kabulü ile kesit boyuncaki integral denklemler, TE ve TM modları için skaler iki boyutlu denklemler haline almaktadır. Klavuz duvarlarındaki yüzey akımı, dikdörtgen darbe temel (basis) fonksiyonları kullanılarak seriye açılmıştır. Testing için nokta uyumluluk (point matching) kullanılması sonucu her bir parçanın merkezinde elde edilen denklemlerden TE ve TM tipi modlar için matris formülasyonları elde edilir. MOM empedans matrislerinin determinantının sıfıra eşitlenmesi sonucu problem iki ayrı lineer olmayan özdeğer denklemine dönüşür. Bu denklemlerin özdeğerleri, TE ve TM modlarının kesim dalga sayılarına karşı düşmektedir. Elde edilen formülasyonun avantajı, dikdörtgen veya dairesel dalga klavuzu gibi analitik çözümleri bilinen dalga klavuzlarına uygulanabilmesinin yanında, analitik çözümleri mevcut olmayan rastgele kesite sahip dalga klavuzlarına da uygulanabilmesidir.

2. FORMÜLASYON

İncelenen yapı, rastgele kesite sahip olan içi boş mükemmel iletken bir dalga klavuzdur. Dalga klavuzunun simetri ekseni z ekseni boyunca yer aldığı kabul edilmiştir. Klavuzun yapısı Şekil 2.1'de görülmektedir. Problem frekans domeninde analiz edileceği için fazör denklemler kullanılacaktır. Klavuz modlarının belirlenmesinde TM ve TE modları için ayrı ayrı denklem sistemleri oluşturularak incelenecektir.

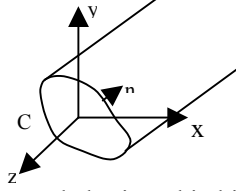
TM Modları

Klavuz içindeki yayılacak dalganın ilerleme yönünde magnetik alanının bulunmadığı durumda, klavuz özdeğer denklemleri eksen yönündeki elektrik alan bileşeni cinsinden ifade edilebilir. Kapalı klavuz çevresinde indüklenen yüzey akımları cinsinden klavuz kesiti içerisindeki elektrik alan Green fonksiyonu kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir:

$$\vec{E}(\vec{r}_s) = \oint_C g_0(\vec{r}_s, \vec{r}'_s; k_s) \vec{J}(\vec{r}'_s) dl \quad (2.1)$$

Burada \vec{J} dalga klavuzunun duvarlarındaki yüzey akımı, k_s özdeğerleri TM modlarının kesim dalga sayıları, g_0 ise iki boyutlu Green fonksiyonudur. Klavuz duvarlarında elektrik alanın teğet bileşeninin sıfır olma koşuluna göre $\vec{n} \times \vec{E} = 0$ olacaktır. Yani,

$$\oint_C g_0(\vec{r}_s, \vec{r}'_s; k_s) J_z(\vec{r}'_s) dl = 0, \quad \vec{r}'_s \in C \quad (2.2)$$



Şekil 2.1. Rastgele kesite sahip bir dalga klavuzu

Temel (basis) veya açılım (expansion) fonksiyonu olarak dikdörtgen darbe fonksiyonlarının kullanılması ve nokta uyumluluk (point matching) yönteminin kullanılması sonucu darbelerin merkezlerinde elde edilen denklemlerden MOM matris formülasyonu oluşturulur. Yani C çevresi her biri ΔC_n 'e eşit olan N parçaya bölünüp C üzerindeki yüzey akımı J_z (2.3)'de verilen dikdörtgen darbe fonksiyonları cinsinden seriye açılarak (2.4)'deki gibi yazılabilir. Her bir ΔC_m 'in merkezinde (x_m, y_m) elde edilen denklemler (2.5)'deki MOM matris elde edilmesini sağlar.

$$f_n(\vec{r}_s) = \begin{cases} 1 & \vec{r}_s \in \Delta C_n \\ 0 & \vec{r}_s \notin \Delta C_n \end{cases} \quad (2.3)$$

$$J_z = \sum \alpha_n f_n \quad (2.4)$$

$$[Z_{mn}] [\alpha_n] = 0 \quad (2.5)$$

burada $[\alpha_n]$ yüzey akımının açılım katsayılarını içeren matris, $[Z_{mn}]$ ise MOM empedans matrisidir. Bu matris aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Z_{mn}(k) = \frac{k\eta}{4} \int_{\Delta C_n} H_0^{(2)} \left[k \sqrt{(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2} \right] dl \quad (2.6)$$

(2.6)'daki integralin basit analitik çözümü bulunmadığından matris elemanları sayısal yaklaşımlarla yapılarak bulunur. Yapılan yaklaşımlarla MOM empedans matrisi için aşağıdaki fade elde edilir.

$$Z_{mn}(k_s) = \begin{cases} (\Delta C_n)^2 \left[1 + i \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{e^\gamma k_s \Delta C_n}{4e} \right) \right] & m = n, \\ \Delta C_n \Delta C_m H_0^{(2)} \left[k_s \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} \right] & m \neq n, \end{cases} \quad (2.7)$$

burada $\gamma=0.5772$ olan Euler sabitidir. k_s özdeğerleri (2.8)'de verilen lineer olmayan özdeğer denkleminde elde edilir.

$$\det[Z_{mn}(k_s)] = 0 \quad (2.8)$$

TE Modları

Şekil 2.1'deki dalga klavuzunun TE modları H_z alan bileşeni ile karakterize edilir. TM modları bulunurken yapıldığı gibi buradada, temel fonksiyonu olarak (2.3)'de verilen dikdörtgen darbe fonksiyonları ve nokta uyumluluk yöntemi kullanılarak yüzey akımı (2.4)'deki gibi yazılır. Sonuçta elde edilen matris denklemi de yine (2.7)'deki gibi olacaktır. Bu ifadedeki MOM empedans matrisi ise aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Z_{mn}(k_s) = \delta_{mn} + H_z(m, n) \quad (2.9)$$

burada δ_{mn} Kronecker delta ve $H_z(m, n)$ ise (x_m, y_m) noktalarındaki H_z bileşenini göstermektedir. (2.9) ifadesi sayısal yaklaşıklıklarla aşağıdaki gibi yazılabilir.

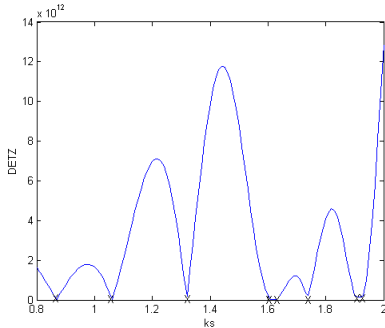
$$Z_{mn}(k_s) = \begin{cases} 1/2 & m = n, \\ \frac{j}{4} \Delta C_n (\bar{n} \cdot \bar{u}_{nm}) H_1^{(2)} \left[k_s \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2} \right] & m \neq n, \end{cases} \quad (2.10)$$

burada \bar{u}_{nm} vektörü kaynak noktası olan (x_n, y_n) 'den alan noktası olan (x_m, y_m) 'e doğru olan birim vektördür. k_s özdeğerleri yine TM modları bulunurken olduğu gibi (2.8)'de verilen özdeğer denkleminde bulunur.

3.UYGULAMA

Bölüm 2'de elde edilen formülasyon dikdörtgen ve dairesel gibi analitik çözümleri bilinen dalga klavuzlarına uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar hem TM modları hemde TE modları için analitik sonuçlarla uyumlu olduğu görülmüştür. Aşağıda verilen şekillerde ve şekillerin yanında verilen tablolarda sırasıyla sayısal olarak elde edilen sonuçlar ve analitik sonuçlar görülmektedir. Şekillerdeki grafiklerin sıfır olduğu noktalar k_s özdeğerlerine karşı düşmektedir. Şekil 3.1 dikdörtgen dalga klavuzu için TM modlarının sayısal olarak, Tablo 3.1 analitik olarak elde edilen kesim dalga sayılarını, Şekil 3.2 dairesel dalga klavuzu için TM modlarının sayısal olarak, Tablo 3.2 analitik olarak elde edilen kesim dalga sayılarını, Şekil 3.3 dikdörtgen dalga klavuzu için TE modlarının, sayısal olarak, Tablo 3.3 analitik olarak elde edilen kesim dalga sayılarını, Şekil 3.4 dairesel dalga klavuzu için TE modlarının sayısal olarak ve Tablo 3.4 ise analitik olarak elde edilen kesim dalga sayılarını göstermektedir. Şekillerdeki değerlerle tablolardaki değerler karşılaştırıldığında bunların tamamen uyumlu oldukları görülecektir.

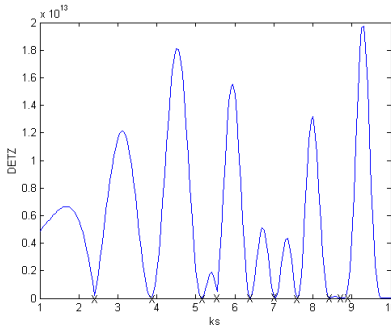
Ayrıklaştırma sayısı ile bulunan modların yakınsaklığını incelemek amacıyla dairesel dalga klavuzunun TM_{01} modu için farklı ayrıklaştırma sayılarına (N) karşılık kesim dalga sayıları hesap edilmiş olup elde edilen sonuçlar Tablo 3.5'de verilmiştir. Tabloda da görüleceği üzere ayrıklaştırma sayısı arttıkça sonucun 2.4049 değerine daha iyi yakınsadığı tespit edilmiştir. Şekil 3.5 ise yukarıda oluşturulan formülasyonun altıgen şeklinde bir yapıya sahip olan ve analitik çözümü mevcut olmayan bir dalga klavuzuna uygulanması sonucu elde edilen TM modlarını göstermektedir.



Şekil 3.1 Dikdörtgen dalga klavuzunun TM modları

Tablo 3.1. Dikdörtgen dalga klavuzunun TM modları için analitik sonuçlar

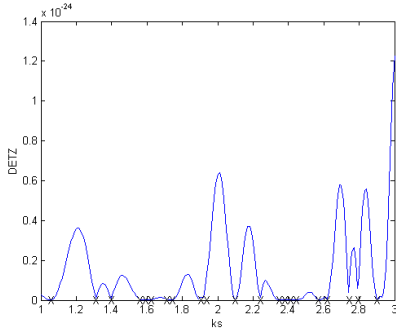
k_s	m=1	m=2	m=3
n=1	0.8595	1.6091	2.3819
n=2	1.0508	1.7189	2.4574
n=3	1.3090	1.8879	2.5784
n=4	1.6020	2.1017	2.7388



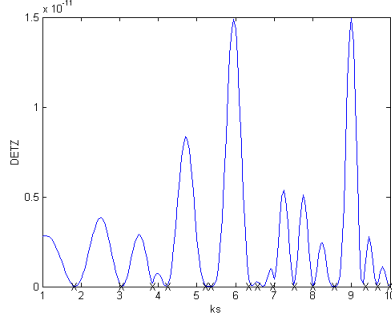
Şekil 3.2 Dairesel dalga klavuzunun TM modları

Tablo 3.2. $J_m(x)=0$ 'ın x_{mn} kökleri

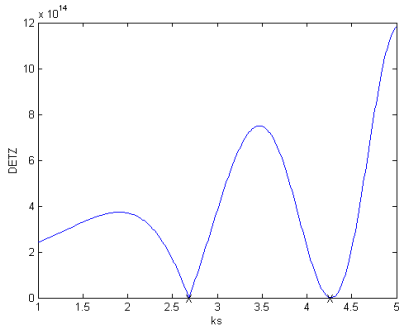
	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4
N=1	2.4049	3.8318	5.1357	6.3802	7.5884
N=2	5.5201	7.1056	8.4173	9.7610	11.0647
N=3	8.6537	10.1735	11.6199	13.015	14.3726



Şekil 3.4. Dikdörtgen dalga klavuzunun TE modları



Şekil 3.4. Dairesel dalga klavuzunun TE modları



Şekil 3.5. Altıgen yapıda bir dalga klavuzunun TM modları

Tablo 3.1. Dikdörtgen dalga klavuzunun TE modları için analitik sonuçlar

k_s	m=0	m=1	m=2	m=3
k=0	0	0.7854	1.5708	2.3562
n=1	0.3491	0.8595	1.6091	2.3819
n=2	0.6981	1.0508	1.7189	2.4574
n=3	1.0472	1.3090	1.8879	2.5784
n=4	1.3963	1.6020	2.1017	2.7388

Tablo 3.4. $J'_m(x) = 0$ 'ın x_{mn} kökleri

	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4
n=1	3.8318	1.8412	3.0542	4.2012	5.3175
n=2	7.0156	5.3315	6.7062	8.0153	9.2824
n=3	10.1735	8.5363	9.9695	11.3459	12.6819

Tablo 3.5. Ayırıklaştırma sayısı- k_s değişimi

Ayırıklaştırma sayısı	Bulunan k_s değeri
N=10	2.4310
N=20	2.4210
N=40	2.4130
N=80	2.4090
N=100	2.4080
N=150	2.4050

4.SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, Moment Yöntemi kullanılarak rastgele kesite sahip, mükemmel iletken bir dalga klavuzunun TE ve TM tipi modları sayısal olarak belirlenmiştir. Temel fonksiyonu olarak darbe fonksiyonları ve nokta uyumluluk yönteminin kullanılması sonucu darbelerin merkezlerinde elde edilen denklemlerden MOM matris formülasyonu oluşturulmuştur. MOM empedans matrislerinin özdeğerlerinden, TM ve TE tipi modların kesim dalga sayıları elde edilmiştir. Mevcut formülasyon analitik çözümleri bilinen dalga klavuzlarına uygulanarak sonuçların analitik sonuçlarla oldukça uyumlu olduğu gözlenmiştir. Daha sonra bu formülasyon, düzgün geometrik yapıya sahip olmayan dalga klavuzlarına uygulanmış ve anlamlı sonuçlar elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Robert L. Wanger, Gregory P. Otto, Weng Cho Chew, 'Fast Waveguide Mode Computation Using Wavelet-Like Basis Functions', IEEE Microwave and Guided Waves Letters, Vol.3, No 7, July 1993.
- [2] Harrington, Roger F., 'Field Computation By Moment Methods', The Mcmillan Company, NewYork, 1968.
- [3] Balanis, Constantine A, 'Advanced Engineering Electromagnetics', John Wiley&Sons, NewYork, 1989.
- [4] Felsen, Leopold B., Marcuvitz, N., 'Radiation and Scattering of Waves', Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.